בס"ד

שיטות נומריות, 88-376 ד"ר ג'רמי שיף

מבחן מועד ג', סמסטר א' תשס"ב

זמן המבחן: שעתיים וחצי.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס מדעי (אבל לא מחשב נייד).
יש לענות על כל 6 השאלות בחלק א' ועל 2 מתוך 4 השאלות בחלק ב'.
ניקוד השאלות: בחלק א' 8 נקודות לכל שאלה, בחלק ב' 25 נקודות לכל שאלה
(סה"כ הניקוד: $100 =$ (בונוס אוטומטי) $2 + 25 \times 2 + 8 \times 6$).
יש לנמק היטב כל תשובה!

חלק א'

1. הסבר מה קורה כאשר כותבים הפקודות הבאות ב-Matlab או Scilab:

$$
\begin{aligned}
&\quad x = [0 \ : \ 0.01 \ : \ 1] \ ; \\
&\text{for } i = 1 : 100 \\
&\quad x = 1.5 * x \ .* \ (1 - x) \ ; \\
&\text{end} \\
&\quad x
\end{aligned}
$$

2. השתמש בשני סיבובים של שיטת ניוטון למצוא את השורש של $x = \cos x$ שהוא קרוב ל-0.7.

3. מהוא המספר השלם הכי קטן גדול מ-2^{60} שניתן להציג באופן מדוייק בתקן float? מהוא בתקן double?

4. מצא את הישר $y = ax + b$ שהוא הקירוב הטוב ביותר (במובן של ריבועים מזעריים) לנתונים הבאים:

x_n	1	3	4	6
y_n	9.61	7.38	6.81	5.02

5. מצא את פולינום $p_1(x) = x + b$ מדרגה 1 שהוא אורתוגונלי, על הקטע $(1,2)$, לפולינום $p_0(x) = 1$, ביחס למשקל $w(x) = (x-1)(2-x)$.

6. חשב את האינטגרל

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sin x}{x} dx$$

על ידי תרבוע גאוס עם $n = 4$.

<u>חלק ב'</u>

7. א. מצא את פולינום הביון $p(x)$ עבור הנתונים הבאים:

x	-2	-1	0	1	2
y	-2	-1	α	1	2

כאשר α הוא מספר ממשי כל שהוא.

ב. הוכח שהפולינום $p(x)$ שמצאת בסעיף א. מקיים $p'(0) = 1$, ומצא עוד שני ערכים של x, חוץ מ-0, כך ש-$p'(x) = 1$.

ג. איך נראה הגרף של $p(x)$? יש לצייר בשלושת המקרים $\alpha < 0$, $\alpha = 0$, $\alpha > 0$.

8. למשוואה $x^3 - 2x^2 - 3x + 5 = 0$ יש שלושה שורשים, $x \approx -1.65, 1.27, 2.38$. מוצעה השיטה הרקורסיבית

$$x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n^2 - 3}$$

למצוא את השורשים האלה לדיוק יותר גבוה.

א. על ידי שלושה סיבובים של הרקורסיה, החל מהקירובים הנתונים לשורשים, החלט באיזה מקרים הרקורסיה הזאת כן יכולה לשפר את הדיוק, ובאיזה מקרים לא.

ב. הסבר את התוצאות של סעיף א. על ידי התנאי הסטנדרטי להתכנסות של רקורסיה מהסוג $x_{n+1} = \phi(x_n)$.

9. מצא את הפולינום $p(x)$ מדרגה 2 או פחות, שהוא הקירוב הכי טוב על הקטע $(-1, 1)$ לפונ-קציה $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, במובן ש-

$$S = \int_{-1}^{1} (f(x) - p(x))^2 dx$$

הוא מינימלי. אם יש צורך לחשב אנטגרלים שאינך יכול לחשב באופן מדוייק, ניתן להסתמך על כלל סמפסון עם לפחות 6 קטעים.

10. א. האם זה נכון שתמיד כאשר מספר המצב של המטריצה A גבוה אזי הפתרונות של שתי הבעיות $Ax_1 = b_1$ ו-$Ax_2 = b_2$ יהיו רחוקים זה מזה, אפילו כאשר b_1 ו-b_2 קרובים?

ב. מצא אומדן של מספר המצב של המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

על ידי פתרון המערכת $Ax = b$ עבור $b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ ו-$b = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 & -0.1 \end{pmatrix}^T$.

בהצלחה!!