בס"ד

שיטות נומריות, 88-376   **ד"ר ג'רמי שיף**

מבחן מועד ב', סמסטר א' תשס"ב

זמן המבחן: שעתיים וחצי.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס מדעי (אבל לא מחשב נייד).
יש לענות על כל 6 השאלות בחלק א' ועל 2 מתוך 4 השאלות בחלק ב'.
ניקוד השאלות: בחלק א' 8 נקודות לכל שאלה, בחלק ב' 25 נקודות לכל שאלה
(סה"כ הניקוד: $100 =$ (בונוס אוטומטי) $6\times 8+2\times 25+2$).
יש לנמק היטב כל תשובה!

חלק א'

1. למשוואה $x^3+x-1=0$ יש שורש קרוב ל-$x=0.7$. השתמש בשני סיבובים של שיטת ניוטון לשפר קירוב זה.

2. בשאלה זו r הוא ווקטור שורה ממימד n, c הוא ווקטור עמוד ממימד n ו-A היא מטריצה $n\times n$, כך ש-$\det A\neq 0$. איזה מבין הפקודות הבאות הן פקודות חוקיות ב-Matlab או scilab: $A*(A\backslash c)$, $(A*A)\backslash c$, $A.*(A\backslash c)$, $(A.*A)\backslash c$, $(r/A)*(A\backslash c)$, $(r\backslash A).*(A/c)$?

3. מצא $p(3)$, כאשר $p(x)$ הוא פולינום מדרגה 3 או פחות כך ש- $p(0)=1$, $p(1)=0$, $p(2)=3$, $p(4)=0$.

4. מצא את הקו הישר $p(x)=ax+b$ שהוא הקירוב הטוב ביותר, במובן של ריבועים מזעריים, לנקודות

x_i	-1.00	-0.50	0.00	0.50	1.00
y_i	0.67	0.96	1.00	1.04	1.33

5. מצא את הקו הישר $p(x)=ax+b$ שהוא הקירוב הטוב ביותר על הקטע $[-1,1]$ לפונקציה $f(x)=1+\frac{1}{3}x^3$, במובן ש-

$$\int_{-1}^{1}(f(x)-p(x))^2dx$$

הוא מינימלי.

6. חשב את האינטגרל

$$\int_{-1}^{1}e^{-x^2/2}dx$$

על ידי תרבוע גאוס (Gaussian quadrature) עם $n=4$.

חלק ב'

7. א. מצא את יחס הנסיגה שמקבלים כאשר מפעילים את שיטת ניוטון למשוואה $x^d = 0$. (d מספר שלם נתון גדול מ-1) האם יש התכנסות לשורש $x = 0$? האם ההתכנסות היא ליניארית או ריבועית?

ב. מצא את יחס הנסיגה שמקבלים כאשר מפעילים את שיטת ניוטון למשוואה $f(x) = 0$, כאשר $f(x)$ היא הפונקציה

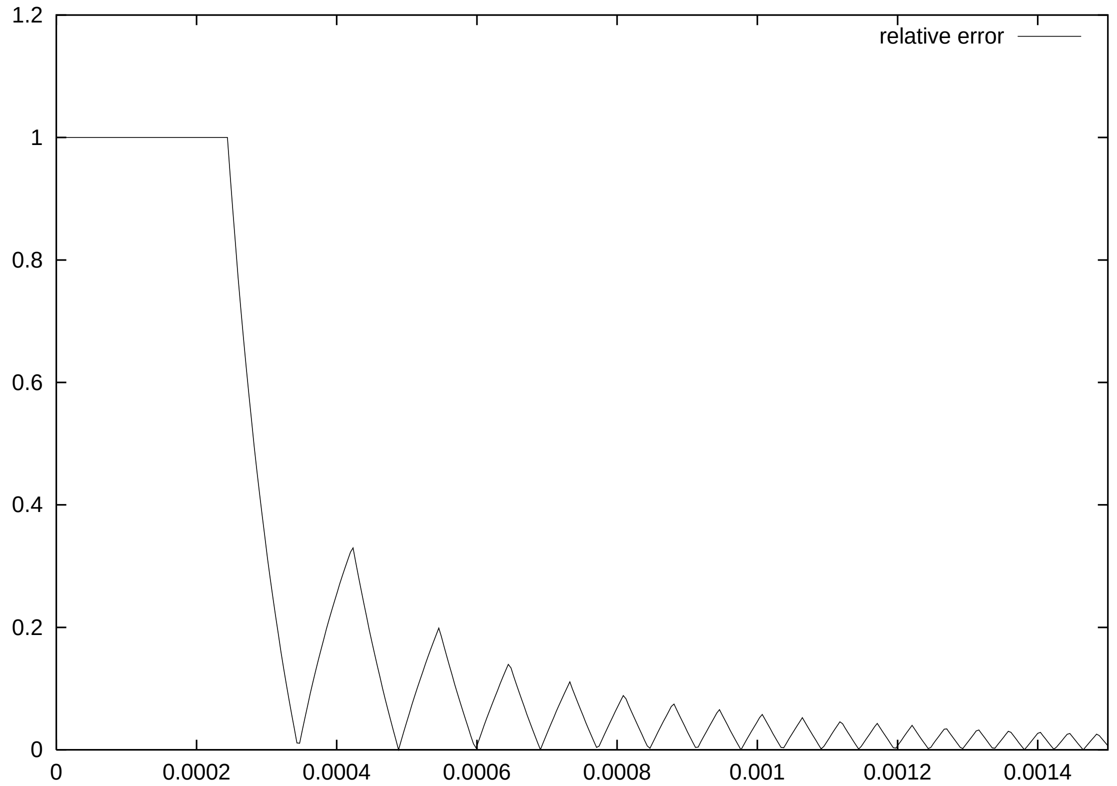
$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

האם יש התכנסות לשורש $x = 0$? יש להתייחס לכל בחירה אפשרית של x_0. כאשר יש התכנסות, האם היא ליניארית, ריבועית או מה?

8. א. מה הם המספרים הכי גדולים שהם קטנים מ-1 בתקן float ובתקן double?

ב. מצא את ה-ϵ החיובי הכי קטן, כך שכאשר מחשבים את $1 - \epsilon^2/2$ בתקן float מקבלים מספר קטן מ-1. מה היא התשובה אם עובדים בתקן double?

ג. למטה מופיע גרף של הטעות היחסית, כפונקציה של ϵ, בתוצאות שמתקבלות על ידי שימוש בתקן float לחשב $1 - (1 - \epsilon^2/2)$. הסבר את הצורה של הגרף.



9. א. מצא את ה-natural cubic spline אשר עובר דרך שלושת הנקודות $(-h,\alpha),(0,\beta),(h,\gamma)$, כאשר h,α,β,γ הם מספרים ממשיים כל שהם עם $h>0$. יש לתת נוסחאות מפורשות ל-cubic spline על הקטעים $(-h,0)$ ו-$(0,h)$.
ב. הוכח שבמקרה ששלושת הנקודות נמצאות על קו ישר אחד, אזי ה-cubic spline שחשבת בסעיף א. שווה ל-linear spline דרך שלושת הנקודות.
ג. הוכח שאם $\alpha\neq\beta=\gamma$ אזי אין ל-cubic spline מסעיף א. נקודות קריטיות בקטע $(-h,0)$. תן הסבר אינטואיטיבי לתופעה זו.

10. א. הוכח שכאשר מחשבים קירוב לאינטגרל

$$\int_0^1 x\ dx$$

על ידי כלל הטרפז, עם n קטעים, מקבלים את התשובה המדויקת $\frac{1}{2}$. נוסחת עזר:

$$1+2+\ldots+(N-2)+(N-1)=\frac{N(N-1)}{2}$$

ב. הוכח שכאשר מחשבים קירוב לאינטגרל

$$\int_0^1 x^3\ dx$$

על ידי כלל הטרפז, עם n קטעים, מקבלים את התשובה $\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$. נוסחת עזר:

$$1^3+2^3+\ldots+(N-2)^3+(N-1)^3=\frac{N^2(N-1)^2}{4}$$

מה מקבלים על ידי כלל סמפסון?
ג. כאשר מחשבים קירוב לאינטגרל

$$\int_0^1 x^5\ dx$$

על ידי כלל הטרפז, עם n קטעים, מקבלים את התשובה $\frac{1}{6}\left(1+\frac{5}{2n^2}-\frac{1}{2n^4}\right)$. מה מקבלים על ידי כלל סמפסון? האם ניתן לשפר על ידי שימוש בשיטת רומברג?

בהצלחה!!