בס"ד

<u>שיטות נומריות, 88-376</u> <u>ד"ר ג'רמי שיף</u>

<u>מבחן מועד א', סמסטר א' תשס"ב</u>

זמן המבחן: שעתיים וחצי.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס מדעי (אבל לא מחשב נייד).
יש לענות על כל 6 השאלות בחלק א' ועל 2 מתוך 4 השאלות בחלק ב'.
ניקוד השאלות: בחלק א' 8 נקודות לכל שאלה, בחלק ב' 25 נקודות לכל שאלה
(סה"כ הניקוד: $100 =$ (בונוס אוטומטי) $6 \times 8 + 2 \times 25 + 2$).
יש לנמק היטב כל תשובה!

<u>חלק א'</u>

1. למשוואה

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^3}} = \frac{3}{4}$$

יש שורש בין $x = 0.9$ ובין $x = 1.0$. מצא קירוב לשורש או על ידי שלושה סיבובים של חציית הקטעים או על ידי סיבוב אחד של שיטת ניוטון עם קירוב התחלתי $x = 0.9$.

דרך חציית הקטעים: נכתוב $f(x) = 1/\sqrt{1+x^3}$. $f(0.9) \approx 0.76$ ו-$f(1.0) \approx 0.71$ לכן יש אכן שורש בין 0.9 ו-1.0. **סיבוב ראשון:** $f(0.95) \approx 0.73$, לכן משורש בין 0.9 ל-0.95. **סיבוב שני:** $f(0.925) \approx 0.747$ לכן השורש בין 0.9 ל-0.925. **סיבוב שלישי:** $f(0.9125) \approx 0.754$. לכן השורש בין 0.9125 ו-0.925. ניתן לקחת כקירוב כל מספר בקטע זה, אמצע הקטע הוא בערך 0.919. (תשובה אמיתית $0.9196 \approx (7/9)^{1/3}$.)

דרך ניוטון: נכתוב $f(x) = 1/\sqrt{1+x^3} - 3/4$. רקורסית ניוטון היא

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\frac{1}{\sqrt{1+x_n^3}} - \frac{3}{4}}{-\frac{3x_n^2}{2(1+x_n^3)^{3/2}}}$$

אם ניקח $x_0 = 0.9$ מקבלים $x_1 \approx 0.919658$. (תשובה אמיתית $0.919641 \approx (7/9)^{1/3}$.)

---

2. כתבתי תוכנה קצרה לחשב את הפונקציה

$$f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2} .$$

כאשר אני מפעיל את התוכנה שלי על $x = 3 \times 10^{-10}$ אני מקבל את התשובה 0.602335, כאשר אני מפעיל את התוכנה על $x = 2 \times 10^{-10}$ אני מקבל את התשובה 0.000000. לפי חבר שלי, ל-x קטן $f(x)$ אמור להיות בערך 0.5. הסבר!

כאשר x קורב ל-0 $\cos(x)$ קרוב ל-1. לכן אם ניקח x מאוד קטן, המחשב יחשוב ש- $\cos(x)$ שווה ל-1, ויחשב ש-$f(x) = 0$. זה מה שקרה כאשר $x = 2 \times 10^{-10}$. ל-x קצת יותר גדול, המחשב יתכן $\cos(x)$ שונה מ-1, אבל הטעות היחסית בהפרש $1 - \cos(x)$ עדיין עלולה להיות גבוהה, כמו שאנחנו רואים כאשר $x = 3 \times 10^{-10}$.

---

3. מצא את מספר המצב של המטריצה

$$\begin{pmatrix} 99 & 98 \\ 100 & 99 \end{pmatrix}$$

בנורמה 1 ובנורמה ∞.

נקרא למטריצה A. $\det(A) = 99^{-}98 \times 100 = 1$, ולכן

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 99 & -98 \\ -100 & 99 \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$\begin{aligned} ||A||_1 &= \max(199, 197) = 199 \\ ||A^{-1}||_1 &= \max(199, 197) = 199 \\ ||A||_\infty &= \max(197, 199) = 199 \\ ||A^{-1}||_\infty &= \max(197, 199) = 199 \\ \kappa_1(A) &= ||A||_1 \cdot ||A^{-1}||_1 = 199^2 = 39601 \\ \kappa_\infty(A) &= ||A||_\infty \cdot ||A^{-1}||_\infty = 199^2 = 39601 \end{aligned}$$

---

4. מצא פולינום מדרגה לא יותר מ-3 שעובר דרך הנקודות

x	y
0.0000	1.0000
0.3333	0.9820
0.6667	0.8783
1.0000	0.7071

טבלת הפרשים מחולקים:

x	y			
0.0000	1.0000			
0.3333	0.9820	-0.05401		
0.6667	0.8783	-0.3110	-0.3855	
1.0000	0.7071	-0.5137	-0.3040	0.0815

התשובה:

$$1 - 0.05401x - 0.3855x(x-0.3333) + 0.0815x(x-0.3333)(x-0.6667)$$

---

5. מצא γ כך שהפולינומים 1, $x-1$, $x^2-2x+\gamma$ הם אורתוגונליים ביחס למשקל 1 על הקטע $[0,2]$.

$$\int_0^2 (x^2-2x+\gamma)\cdot 1 \quad dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + \gamma x\right]_0^2 = \frac{8}{3} - 4 + 2\gamma = 2\gamma - \frac{4}{3}$$

כדי שזה יהיה 0 יש לבחור $\gamma = \frac{2}{3}$. שאר יחסי האורתוגונליות הם אוטומטיים.

---

6. מצא קירוב לאנטגרל

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$$

על ידי כלל סמפסון עם 4 קטעים בעלי רוחב $h = \frac{1}{4}$.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} \approx \frac{0.25}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{4}{\sqrt{1+0.25^3}} + \frac{2}{\sqrt{1+0.5^3}} + \frac{4}{\sqrt{1+0.75^3}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 0.9097$$

חלק ב'

7. א. אם אני כותב ב-Matlab או Scilab את הפקודות הבאות:

```
A  =  [ 99  100  ;  98  99 ]
b1  =  [  1  ;  1  ]
b2  =  [  1.01  ;  1  ]
b3  =  [  1  ;  1.01  ]
b4  =  [  1.01  ;  1.01  ]
A\b1
A\b2
A\b3
A\b4
```

אזי ל-4 פקודות האחרונות אני מקבל את התשובות

$$\begin{pmatrix} -1.0100 \\ 1.0100 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2.0000 \\ 1.9900 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -0.0100 \\ 0.0200 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1.0000 \\ 1.0000 \end{pmatrix}$$

(כאן הסדר הוא משמאול לימין). מה ניתן להשיג מתוצאות אלה על מספר המצב של המטריצה A? כאן ניתן לעבוד או בנורמה 1 או בנורמה ∞.

ב. למדנו בכיתה שכאשר Matlab או Scilab פותרים את המערכת $Ax = b$, הם מחשבים פירוק LU ל-A (עם pivoting אם צריך), ואז פותרים את המערכות $Ly = b$ ואח"כ $Ux = y$. באיזה שלב (או שלבים) של תהליך זה יש סכנה שתיכנס טעות? ניתן לענות על שאלה זו על ידי עיון במקרה ש-A היא המטריצה בסעיף א.

א. נקרא ל-4 התוצאות v_1, v_2, v_3, v_4 (משמאול לימין). השינויים בין b_1, b_2, b_3, b_4 כולם קטנים, אבל רואים שיש שינויים גדולים בין v_1, v_2, v_3, v_4, כך שניתן לומר מיד שמספר נמצב הוא גבוה. לכל i, j יש לנו ש

$$\frac{||v_i - v_j||}{||v_i||} \leq \kappa(A)\frac{||b_i - b_j||}{||b_i||}$$

אם נעבוד בנורמה ∞ אזי $||b_i - b_j|| = 0.01$, $||b_i|| \approx 1$, ולכן יש לנו ש-

$$\kappa(A) \geq 100\frac{||v_i - v_j||}{||v_i||}$$

ברור שנשיג את המקסימום מאי-שיוויון זה אם ניקח $i = 2$, $j = 3$. אזי $||v_i - v_j|| \approx 2$, $||v_i|| = 0.02$, ולכן מקבלים $\kappa(A) \geq 10^4$. זה וודאי נחשב כגדול עם עושים חישובים ל-4 או 5 ספרות דיוק.

ב. נעבור על התהתיך צעד-צעד. כאשר עושים פירוק LU משאירים שורה ראשונה, ומוסיפים לשורה שניה $-\frac{98}{99}$ כפול שורה ראשונה. מקבלים

$$\begin{pmatrix} 99 & 100 \\ 0 & 99 - \frac{98}{99}100 \end{pmatrix}$$

קל לעשות חישוב מדויק לראות שהרכיב האחרון הוא $\frac{1}{99}$. אבל בשלב הזה המחשב עושה חיסור בין שני מספרים דומים בסדר גודל של 100. ולכן יש אובדן דיוק של שתי ספרות בשלב זה של החישוב. אבל סה"כ זה רק ברכיב אחד.
ממשיכים לשלבים הבאים: מצאנו של

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{98}{99} & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 99 & 100 \\ 0 & \frac{1}{99} \end{pmatrix}$$

ננתח את הפתרון של $Ly = b$, כלומר

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{98}{99} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

מוצאים ש-$y_1 = b_1$, אין כאן אובדן דיוק. ועכשיו $y_2 = b_2 - \frac{98}{99}b_1$. אם b_1, b_2 קרובים זה לזה (כמו בסעיף א)), יהיה כאן חיסור של שני מספרים דומים, ולכן אובדן דיוק. צריך להגיד, אבל שוב, זה רק משפיע על רכיב אחד ב-y.

כאשר פותרים $Ux = y$, קודם מוצאים את x_2, וזה דורש שימוש ב-y_2 והרכיב $\frac{1}{99}$ ב-U, שבשניהם ראינו שיש טעות! ואח"כ משתמשים ב-x_2, שהוכפל ע"י 100 למצוא את x_1. בשלב זה הטעויות יוגדלו.

סיכום: אובדן דיוק בגלל טעויות שיכולים להכנס בשלבים הראשונים וגדלים בשלב האחרון (פתרון $Ux = y$).

---

8. א. מצא קירובים I_2, I_4, I_6 לאנטגרל

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$$

על ידי כלל הטרפז עם $2, 4, 6$ צעדים בהתאם.

ב. איך ניתן לצרף לינארית את הקירובים I_2 ו-I_4 לקבל קירוב מדויק יותר (שנקרא I_{24})?

ג. איך ניתן לצרף לינארית את הקירובים I_4 ו-I_6 לקבל קירוב מדויק יותר (שנקרא I_{46})?

ד. התשובה המדוייקת לאנטגרל, ל-8 ספרות דיוק, היא 0.90960426. האם אתה יכול להסביר למה $\frac{1}{8}(9I_{46} - I_{24})$ הוא קירוב מוצלח יותר משאר הקירובים שחשבת?

א.

$$I_2 = \frac{0.5}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{2}{\sqrt{1+0.5^3}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 0.89818122$$

$$I_4 = \frac{0.25}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{2}{\sqrt{1+0.25^3}} + \frac{2}{\sqrt{1+0.5^3}} + \frac{2}{\sqrt{1+0.75^3}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 0.90681704$$

$$I_6 = \frac{1/6}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{2}{\sqrt{1+(1/6)^3}} + \frac{2}{\sqrt{1+(1/3)^3}} + \frac{2}{\sqrt{1+(1/2)^3}} + \frac{2}{\sqrt{1+(2/3)^3}} + \frac{2}{\sqrt{1+(5/6)^3}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 0.90837167$$

הערה: באופן כללי אין הצדקה לתת תשובות אלה ליותר מ-3 ספרות דיוק (אולי 4 במקרה של I_6). אבל היות ובהמשך השאלה מופיעה תשובה מדוייקת ל-8 ספרות, נעבוד בעקביות בדיוק זה.

ב. אם הטעות ב-I_2 היא ϵ, אזי הטעות ב-I_4 היא בערך $\epsilon/4$ (פי 2 מספר הצעדים מוריד את הטעות על ידי גורם של $2^2 = 4$). כלומר,

$$\left.\begin{aligned} I_2 &= I + \epsilon \\ I_4 &\approx I + \frac{\epsilon}{4} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad 4I_4 - I_2 \approx 3I$$

לכן נבחר

$$I_{24} = \frac{4I_4 - I_2}{3} \approx 0.90969565$$

(כמו בשאלה 6.)

ג. אם הטעות ב-I_4 היא ϵ, אזי הטעות ב-I_6 היא בערך $\epsilon/(1.5)^2$ (פי 1.5 מספר הצעדים מוריד את הטעות על ידי גורם של $(1.5)^2 = 2.25$). כלומר,

$$\left.\begin{array}{l} I_4 = I + \epsilon \\ I_6 \approx I + \dfrac{\epsilon}{2.25} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad 2.25 I_6 - I_4 \approx 1.25 I$$

לכן נבחר

$$I_{46} = \frac{2.25 I_6 - I_4}{1.25} \approx 0.90961537$$

ד.

$$\frac{9I_{46} - I_{24}}{9} \approx 0.90960534$$

הטעות בזה היא 108 ביחס לטעויות 1111 ב-I_{46} ו-9139 ב-I_{24}. בשיטת Romberg, אחרי שמצרפים את התוצאות ליניארית לשפר את הדיוק, חוזרים על התהליך לשפר עוד יותר. כמו כן כאן סביר להניח שיש דרך לצרף את התוצאות I_{24} ו-I_{46}. הטעות ב-I_{24} היא בערך פי 8.2 הטעות ב-I_{46} לכן הצירוף המוצע מצליח טוב.

---

9. א. מצא את הקו הישר שהוא הקירוב הכי טוב לנתונים

x_i	1.0	2.2	3.0	3.8	4.2
y_i	0.7	1.2	1.8	2.3	2.3

כאן יש לחשב את הקירוב במובן של ריבועים מזעריים, אלא שיש לתת משקל 1 ל-3 הנקודות הראשונות ומשקל $\frac{1}{2}$ ל-2 הנקודות האחרונות (הנקודות $(3.8, 2.3), (4.2, 2.3)$).

ב. אם בסעיף א. ממירים את 2 הנקודות $(3.8, 2.3), (4.2, 2.3)$ שיש להם משקל $\frac{1}{2}$ עם נקודה אחת $(4.0, 2.3)$ עם משקל 1, האם מקבלים אותו הקו?

ג. האם אתה יכול להציע דרך כללי בבעיות של ריבועים מזעריים להמיר שתי נקודות עם משקל $\frac{1}{2}$ עם אחת עם משקל 1 ?

א. הקו הוא $y = ax + b$ כאשר a, b פותרים

$$\begin{pmatrix} \sum w_i x_i^2 & \sum w_i x_i \\ \sum w_i x_i & \sum w_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum w_i x_i y_i \\ \sum w_i y_i \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 30.88 & 10.2 \\ 10.2 & 4.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17.94 \\ 6.0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{19.48} \begin{pmatrix} 4.0 & -10.2 \\ -10.2 & 30.88 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17.94 \\ 6.0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.542 \\ 0.118 \end{pmatrix}$$

ב. בנוסחה כל הסכומים הם בדיוק אותו דבר חוץ מש-$\sum w_i x_i^2$ יורד ב-0.04 (היות ו-$\frac{1}{2}(3.8^2+4.2^2)-4.0^2=0.04$). ולכן

$$\begin{pmatrix} 30.84 & 10.2 \\ 10.2 & 4.0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 17.94 \\ 6.0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\frac{1}{19.32}\begin{pmatrix} 4.0 & -10.2 \\ -10.2 & 30.84 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 17.94 \\ 6.0 \end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix} 0.547 \\ 0.106 \end{pmatrix}$$

הקו השתנה!

ג. מזוית אחת התשובה היא "כן", מזוית אחרת התשובה היא "לא". מהנוסחה למקדמים של הקו של ריבועים מזעריים נובע שאם אני יודע כל הנקודות חוץ מאחת, ואתה אומר לי מה הם המקדמים של הקו, אני יכול לבחור את הנקודה האחרונה כך שיצא קו זה (2 משוואות ב-2 משתנים). לכן אם מתחילים עם אוסף נקודות, וידוע הקו של ריבועים מזעריים, ועכשיו "מוחקים" 2 נקודות (עם משקלות כל שהם), ומבקשים למצוא נקודה אחרת (עם משקל כל שהוא) כך שהקו לא ישתנה, ניתן לעשות את זה. אבל הנקודה החדשה תלוייה על כל הנקודות באוסף המקורי, לא רק אלה שנמחקו! אין למצוא דרך להמיר 2 נקודות בנקודה חדשה, בלי התייחסות לשאר הנקודות.

---

10. א. מצא את הפרבולה $p(x)=ax^2+bx+c$ שהוא הקירוב הטוב ביותר אל הפונקציה $f(x)=1-x^4$ על הקטע $[-1,1]$, במובן ש-

$$\int_{-1}^{1}\left(f(x)-p(x)\right)^2 dx$$

הוא מינימלי.

ב. מצא את הפרבולה $p(x)=ax^2+bx+c$ שהוא הקירוב הטוב ביותר אל הפונקציה $f(x)=1-x^4$ על הקטע $[-1,1]$, במובן ש-

$$\int_{-1}^{1}\frac{\left(f(x)-p(x)\right)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

הוא מינימלי. רמז לחישוב האנטגרלים: כתוב $f(x)$ כצירוף לינארי של פולינומי צ'ביצ'ב $T_0(x)$, $T_2(x)$, ו-$T_4(x)$.

א. שיטה מהירה: $P_0(x)=1$, $P_2(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}$, $P_4(x)=\frac{35}{8}x^4-\frac{15}{4}x^2+\frac{3}{8}$, ולכן

$$f(x)=1-x^4=-\frac{8}{35}P_4(x)-\frac{4}{7}P_2(x)+\frac{4}{5}P_0(x)$$

ולכן הקירוב הכי טוב הוא

$$p(x)=-\frac{4}{7}P_2(x)+\frac{4}{5}P_0(x)=\frac{38}{35}-\frac{6}{7}x^2$$

השיטה הסטנדרטית לקירוב ע"י פולינומי לז'נדר: $p(x) = a_0P_0(x)+a_1P_1(x)+a_2P_2(x)$,

$$a_i = \frac{\int_{-1}^{1} f(x)P_i(x)dx}{\int_{-1}^{1}(P_i(x))^2dx} = \frac{2i+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_i(x)dx$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-x^4)dx = \frac{4}{5} \\ a_1 &= \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}(1-x^4)xdx = 0 \\ a_2 &= \frac{5}{2}\int_{-1}^{1}(1-x^4)\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)dx = -\frac{4}{7} \end{aligned}$$

ב. שיטה מהירה: $T_0(x) = 1$, $T_2(x) = 2x^2-1$, $T_4(x) = 8x^4-8x^2+1$, ולכן

$$f(x) = 1-x^4 = -\frac{1}{8}T_4(x) - \frac{1}{2}T_2(x) + \frac{5}{8}T_0(x)$$

ולכן הקירוב הכי טוב הוא

$$p(x) = -\frac{1}{2}T_2(x) + \frac{5}{8}T_0(x) = \frac{9}{8}-x^2$$

השיטה הסטנדרטית לקירוב על ידי פולינומי צ'ביצ'ב: $p(x) = a_0T_0(x) + a_1T_1(x) + a_2T_2(x)$,

$$a_i = \frac{\int_{-1}^{1}\frac{f(x)T_i(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx}{\int_{-1}^{1}\frac{(T_i(x))^2}{\sqrt{1-x^2}}dx}$$

המכנה הוא π באשר $i=0$ ו-$\pi/2$ אחרת. ולכן

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)T_0(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx\,, \quad a_1 = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)T_1(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx\,, \quad a_2 = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)T_2(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

ניתן לחשבה את האנטגרלים על ידי הצבות ($a_1 = 0$ על ידי סימטריה), אבל הרבה יותר כל פשוט להציב $-\frac{1}{8}T_4(x) - \frac{1}{2}T_2(x) + \frac{5}{8}T_0(x)$ במקום $f(x)$ ולהשתמש ביחס האורתוגונליות

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_i(x)T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = 0 \qquad i \neq j$$

לקבל $a_0 = 5/8$, $a_2 = -1/2$.