בס"ד

שיטות נומריות, 88-376 ד"ר ג'רמי שיף

מבחן מועד א', סמסטר א' תשס"ב

זמן המבחן: שעתיים וחצי.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס מדעי (אבל לא מחשב נייד).
יש לענות על כל 6 השאלות בחלק א' ועל 2 מתוך 4 השאלות בחלק ב'.
ניקוד השאלות: בחלק א' 8 נקודות לכל שאלה, בחלק ב' 25 נקודות לכל שאלה
(סה"כ הניקוד: $100 =$ (בונוס אוטומטי) $2 + 25 \times 2 + 8 \times 6$).
יש לנמק היטב כל תשובה!

חלק א'

1. למשוואה

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^3}} = \frac{3}{4}$$

יש שורש בין $x = 0.9$ ובין $x = 1.0$. מצא קירוב לשורש או על ידי שלושה סיבובים של חציית הקטעים או על ידי סיבוב אחד של שיטת ניוטון עם קירוב התחלתי $x = 0.9$.

2. כתבתי תוכנה קצרה לחשב את הפונקציה

$$f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2} \, .$$

כאשר אני מפעיל את התוכנה שלי על $x = 3 \times 10^{-10}$ אני מקבל את התשובה 0.602335, כאשר אני מפעיל את התוכנה על $x = 2 \times 10^{-10}$ אני מקבל את התשובה 0.000000. לפי חבר שלי, ל-x קטן $f(x)$ אמור להיות בערך 0.5. הסבר!

3. מצא את מספר המצב של המטריצה

$$\begin{pmatrix} 99 & 98 \\ 100 & 99 \end{pmatrix}$$

בנורמה 1 ובנורמה ∞.

4. מצא פולינום מדרגה לא יותר מ-3 שעובר דרך הנקודות

x	y
0.0000	1.0000
0.3333	0.9820
0.6667	0.8783
1.0000	0.7071

5. מצא γ כך שהפולינומים 1, $x-1$, $x^2-2x+\gamma$ הם אורתוגונליים ביחס למשקל 1 על הקטע $[0,2]$.

6. מצא קירוב לאנטגרל

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$$

על ידי כלל סמפסון עם 4 קטעים בעלי רוחב $h=\frac{1}{4}$.

<u>חלק ב'</u>

7. א. אם אני כותב ב-Matlab או Scilab את הפקודות הבאות:

```
A  =  [ 99  100  ;  98  99 ]
b1  =  [  1  ;  1  ]
b2  =  [  1.01  ;  1  ]
b3  =  [  1  ;  1.01  ]
b4  =  [  1.01  ;  1.01  ]
A\b1
A\b2
A\b3
A\b4
```

אזי ל-4 פקודות האחרונות אני מקבל את התשובות

$$\begin{pmatrix} -1.0000 \\ 1.0000 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -0.0100 \\ 0.0200 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2.0000 \\ 1.9900 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1.0100 \\ 1.0100 \end{pmatrix}$$

(כאן הסדר הוא משמאול לימין). מה ניתן להשיג מתוצאות אלה על מספר המצב של המטריצה A? כאן ניתן לעבוד או בנורמה 1 או בנורמה ∞.

ב. למדנו בכיתה שכאשר Matlab או Scilab פותרים את המערכת $Ax=b$, הם מחשבים פירוק LU ל-A (עם pivoting אם צריך), ואז פותרים את המערכות $Ly=b$ ואח"כ $Ux=y$. באיזה שלב (או שלבים) של תהליך זה יש סכנה שתיכנס טעות? ניתן לענות על שאלה זו על ידי עיון במקרה ש-A היא המטריצה בסעיף א.

8. א. מצא קירובים I_2, I_4, I_6 לאנטגרל

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$$

על ידי כלל הטרפז עם $2, 4, 6$ צעדים בהתאם.

ב. איך ניתן לצרף לינארית את הקירובים I_2 ו-I_4 לקבל קירוב מדויק יותר (שנקרא I_{24})?

ג. איך ניתן לצרף לינארית את הקירובים I_4 ו-I_6 לקבל קירוב מדויק יותר (שנקרא I_{46})?

ד. התשובה המדוייקת לאנטגרל, ל-8 ספרות דיוק, היא 0.90960426. האם אתה יכול להסביר למה $\frac{1}{8}(9I_{46} - I_{24})$ הוא קירוב מוצלח יותר משאר הקירובים שחשבת?

9. א. מצא את הקו הישר שהוא הקירוב הכי טוב לנתונים

x_i	1.0	2.2	3.0	3.8	4.2
y_i	0.7	1.2	1.8	2.3	2.3

כאן יש לחשב את הקירוב במובן של ריבועים מזעריים, אלא שיש לתת משקל 1 ל-3 הנקודות הראשונות ומשקל $\frac{1}{2}$ ל-2 הנקודות האחרונות (הנקודות $(3.8, 2.3), (4.2, 2.3)$).

ב. אם בסעיף א. ממירים את 2 הנקודות $(3.8, 2.3), (4.2, 2.3)$ שיש להם משקל $\frac{1}{2}$ עם נקודה אחת $(4.0, 2.3)$ עם משקל 1, האם מקבלים אותו הקו?

ג. האם אתה יכול להציע דרך כללי בבעיות של ריבועים מזעריים להמיר שתי נקודות עם משקל $\frac{1}{2}$ עם אחת עם משקל 1 ?

10. א. מצא את הפרבולה $p(x) = ax^2 + bx + c$ שהוא הקירוב הטוב ביותר אל הפונקציה $f(x) = 1 - x^4$ על הקטע $[-1, 1]$, במובן ש-

$$\int_{-1}^{1} (f(x) - p(x))^2 \, dx$$

הוא מינימלי.

ב. מצא את הפרבולה $p(x) = ax^2 + bx + c$ שהוא הקירוב הטוב ביותר אל הפונקציה $f(x) = 1 - x^4$ על הקטע $[-1, 1]$, במובן ש-

$$\int_{-1}^{1} \frac{(f(x) - p(x))^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

הוא מינימלי. רמז לחישוב האנטגרלים: כתוב $f(x)$ כצירוף לינארי של פולינומי צ'ביצ'ב $T_0(x)$, $T_2(x)$, ו-$T_4(x)$.

בהצלחה!!