בס"ד

ד"ר ג'רמי שיף

שיטות נומריות, 88-376
מבחן מועד ג', סמסטר א' תשס"א

זמן המבחן: שעתיים וחצי.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס מדעי (אבל לא מחשב נייד).
יש לענות על כל 6 השאלות בחלק א' ועל 2 מתוך 4 השאלות בחלק ב'.
ניקוד השאלות: בחלק א' 8 נקודות לכל שאלה, בחלק ב' 25 נקודות לכל שאלה
(סה"כ הניקוד: $100 =$ (בונוס אוטומטי) $6 \times 8 + 2 \times 25 + 2$).
יש לנמק היטב כל תשובה!

חלק א'

1. השתמש בשני סיבובים בשיטת המיתר (שיטת הסקנט) למצוא קירוב טוב לשורש של המשוואה $x \sin x = 1$, החל מהקירובים $x_0 = 1.0$, $x_1 = 1.1$. (הזוויות ברדיאנים).

2. מצא, בתקן של ה-IEEE, את הייצוג על ידי 32 סיביות של המספר -63.125.

3. מצא, בנורמה כל שהוא, את מספר המצב של המטריצה

$$\begin{pmatrix} 91 & 81 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$$

4. הגדר את ה-cubic spline הטבעי העובר דרך הנקודות $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$. (אין צורך להסביר איך למצוא את ה-spline, יש רק לרשום את התנאים המגדירים אותו).

5. מצא נוסחא ל-a כך שהפונקציה ax היא הקירוב האופטימלי לפונקציה x^3 בקטע $-1 < x < 1$, במובן ש-

$$S(a) = \int_{-1}^{1} (ax - x^3)^2 w(x) dx$$

הוא מינימלי ($w(x)$ פונקציית משקל כל שהיא).

6. השתמש בכלל הטרפז עם $h = 1/4$ למצוא קירוב לאנטגרל

$$\int_0^1 \frac{e^{-x}}{x+3} dx$$

חלק ב'

7. מוצעות שתי שיטות לפתרון המשוואה $x^2-1=0$:

$$x_{n+1}=x_n+\tfrac{1}{2}(x_n^2-1)$$
$$x_{n+1}=x_n-\tfrac{1}{2}(x_n^2-1)$$

הוכח שכל שיטה מתכנסת ריבועית לאחד השורשים של המשוואה, אבל אינה מתכנסת לשורש השני. באופן כללי, האם קיימת שיטה מהצורה

$$x_{n+1}=\alpha x_n^2+\beta x_n+\gamma$$

(α,β,γ קבועים) אשר מתכנסת לשני השורשים של המשוואה $x^2-1=0$?

8. כאשר כותבים ב-Matlab את הפקודות הבאות:

```
a=0.9999999999999999;
for n=1:100
   a=a*a;
end
a
```

מקבלים את התשובה 0. כאשר מוסיפים עוד ספרה 9 בהגדרה של a מקבלים את התשובה 1.

א. הסבר.
ב. מה היא הספרה הכי גדולה שניתן להוסיף בהגדרה של a כך שעדיין מקבלים את התשובה 0 ?
ג. אם בלולאה n רץ רק מ-1 עד 50, האם עדיין מקבלים את התשובה 0 ? מה הוא, לדעתך, מספר האטרציות הכי קטן שניתן לעשות בלולאה ועדיין לקבל את התשובה 0 ?

9. א. מצא את הפולינום היחיד $p(x)$ מדרגה 2 או פחות כך ש- $p(1)=1$, $p(a)=b$, $p(0)=0$, כאשר $0<a<1$.
ב. הסבר למה הפולינום $p(x)$ שמצאת בסעיף א. אינו מונוטוני עולה על הקטע $0\le x\le 1$ אם $b<0$ או $b>1$. על ידי בדיקת המקרה $a=1/2$, $b=5/6$ הראה שגם אם $0<b<1$ ייתכן ש-$p(x)$ אינו מונוטוני עולה.
ג. הוכח שהפולינום שמצאת בסעיף א. הוא מונוטוני עולה על הקטע $0\le x\le 1$ אם ורק אם $a^2<b<a(2-a)$.

10. א. מצא את השורשים x_2, x_2 של $L_2(x)$, הפולינום של Laguerre מדרגה 2.

ב. איך יש לבחור, לפי התאוריה של תרבוע גאוס, את המשקלות w_1, w_2 בנוסחת האנטגרציה

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x)dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) \qquad ?$$

ג. השתמש בנוסחה שמצאת בסעיף ב. למצוא קירוב לאנטגרל

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x+3} dx$$

בהצלחה!!