בס"ד

שיטות נומריות, 88-376 | ד"ר ג'רמי שיף
מבחן מועד א', סמסטר א' תשס"א

זמן המבחן: שעתיים וחצי.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס מדעי (אבל לא מחשב נייד).
יש לענות על כל 6 השאלות בחלק א' ועל 2 מתוך 4 השאלות בחלק ב'.
ניקוד השאלות: בחלק א' 8 נקודות לכל שאלה, בחלק ב' 25 נקודות לכל שאלה
(סה"כ הניקוד: $100 =$ (בונוס אוטומטי) $6\times 8 + 2\times 25 + 2$).
יש לנמק היטב כל תשובה!

חלק א'

1. למשוואה $x\tan x = 1$ יש שורש בין $x=0$ ו-$x=1$. השתמש בשיטת חציית הקטעים למצוא את השורש ל-3 ספרות דיוק.

$x\tan x < 1$ כאשר $x = 0, 0.5, 0.75, 0.813, 0.844, 0.859, 0.860$.
$x\tan x > 1$ כאשר $x = 1, 0.875, 0.867, 0.863, 0.861.0.8605$.
ל-3 ספרות דיוק, השורש הוא 0.860.

2. בקשתי מתוכנה גרפית נפוצה לצייר את הגרף של הפונקציה

$$x^6 - 120x^5 + 6000x^4 - 160000x^3 + 2400000x^2 - 19200000x + 64000000$$

על הקטע $19.9 \le x \le 20.1$. הגרף שקבלתי מופיע למטה, וברור לי שזה לא הגרף של פולינום מדרגה 6. מה קרה?

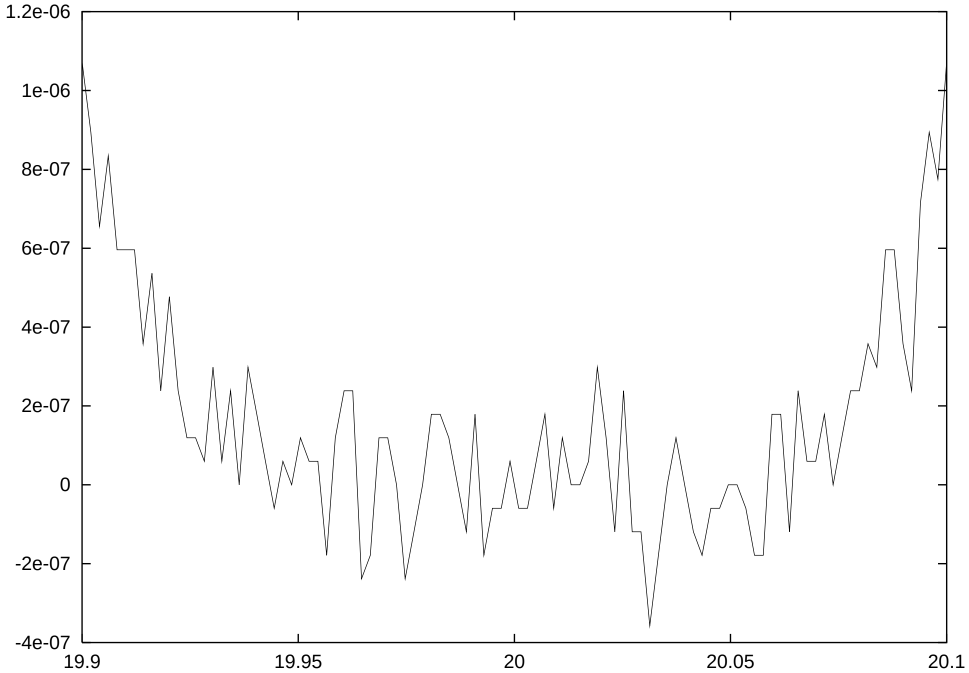
כאשר $x = 20$, $160000x^3 \approx 10^9$. ב-double precision ניתן לסמוך על כ-15 ספרות דיוק, לכן מצפים לשגיאות ברמה של עד 10^{-6}. זה מה שרואים בגרף!

3. א. איזה פקודות היית כותב ב-Matlab כדי לחשב את הווקטורים Av, A^2v, A^3v, כאשר

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ ?$$

(יש גם לתאר איך מכניסים את המטריצה A והווקטור v).

ב. איזה פקודה היית כותב לפתור את המשוואה $Ax = v$?



ג. איזה פקודה היית כותב למצוא את הערכים העצמיים של A ?

א. A = [0 -1/8 1/4 ; 1/8 0 -1/8 ; -1/4 1/8 0]

v = [1 ; 1 ; 1]

w = A * v (ככה מחשבים Av)

w = A * w (ככה מחשבים A^2v)

w = A * w (ככה מחשבים A^3v)

ב. x = A \ v

ג. eig(A)

4. מצא פולינום $p(x)$ מדרגה לא יותר מ-3 כך ש- $p(-1) = -1$, $p(0) = 1$, $p(1) = 0$, $p(2) = 3$.

טבלת הפרשים מחולקים:

-1	-1			
0	1	2		
1	0	-1	$-\frac{3}{2}$	
2	3	3	2	$\frac{7}{6}$

לכן

$$p(x) = -1 + 2(x+1) - \frac{3}{2}x(x+1) + \frac{7}{6}x(x+1)(x-1) = \frac{7}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{3}x + 1$$

(אין צורך לכתוב בצורה האחרונה)

5. מצא פונקציה ליניארית שהיא קירוב, על הקטע $[-1,1]$, לפונקציה $f(x) = e^x - \frac{3}{2}x - 1$.
(נוסחת עזר: $\int xe^x dx = (x-1)e^x + c$.)

הקירוב הסטנדרטי ע"י פולינומי לז'נדר: $f(x) \approx \sum c_i P_i(x)$,

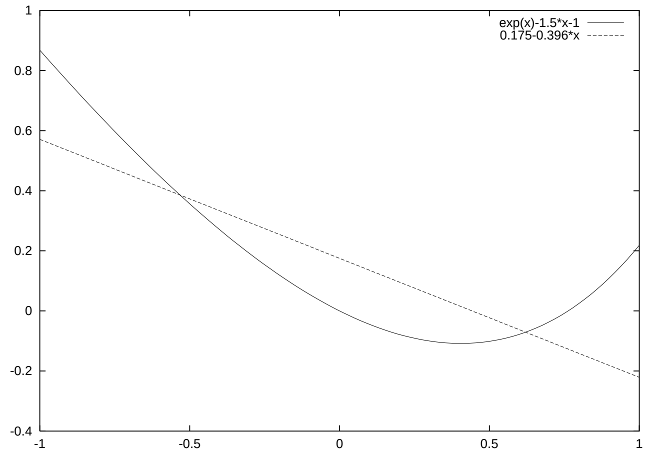
$$c_i = (n + \frac{1}{2}) \int_{-1}^{1} f(x) P_i(x) dx$$

בשבילנו

$$c_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} e^x - \tfrac{3}{2}x - 1 \; dx = \frac{1}{2}(e - e^{-1} - 2) \approx 0.175$$

$$c_1 = \frac{3}{2} \int_{-1}^{1} x(e^x - \tfrac{3}{2}x - 1) \; dx = \frac{3}{2}(2e^{-1} - 1) \approx -0.396$$

ולכן $f(x) \approx 0.175 - 0.396x$.



6. השתמש בכלל סמפסון, עם $h = \frac{1}{4}$, למצוא קירוב ל-

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{1+x^2} dx \; .$$

כלל סמפסון עם $h = \frac{1}{4}$ נותן

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{12} \left(f(0) + 4f(\tfrac{1}{4}) + 2f(\tfrac{1}{2}) + 4f(\tfrac{3}{4}) + f(1) \right)$$

למקרה שלנו $f(x) = \sin x/(1+x^2)$, יוצא

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{1+x^2} dx \approx \frac{1}{12} \left(0 + 4*0.233 + 2*0.384 + 4*0.436 + 0.421\right) \approx 0.322$$

(מדוייק ל-3 ספרות!)

חלק ב'

7. פתור את המערכת

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix} .$$

האם הפתרון רגיש לשינויים קטנים ברכיבים של המטריצה? בדוק איך הפתרון משתנה אם משנים (קצת) את הרכיבים באלכסון הראשי של המטריצה. מה היא המשמעות של זה לגבי מצב המטריצה? האם מצב המטריצה טוב או רע?

נעשה חילוץ גאוס (עם או בלי pivoting, נעבוד באופן מדויק):

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

המטריצה סינגולרית, אבל יש אינסוף פתרונות

$$x = 5 - 3z \ , \quad y = 2 - z \ .$$

אם קצת נשנה את רכיב $3,3$ במטריצה, מ--5 ל--5.001, אזי התוצאה של החילוץ תהיה

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -0.001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

והפתרון יהיה:

$$x = 5 \ , \quad y = 2 \ , \quad z = 0 \ .$$

אם קצת נשנה את ריכב $1,1$ במטריצה, מ-1 ל-1.001, אזי תהליך החילוץ הוא

$$\begin{pmatrix} 1.001 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1.001 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -0.998 & -1.004 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2.006 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1.001 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -0.006 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -0.010 \end{pmatrix}$$

(עדיין כל החישובים מדוייקים!), והפתרון הוא

$$x=0\ ,\quad y=1/3\ ,\quad z=5/3\ .$$

הפתרונות שקבלנו על ידי "הפרעות קטנות" של המטריצה הם קרובים לאיזה שהוא פתרון של המערכת לפני ההפרעה ($z=0$ ו-$z=5/3$ בהתאם). אבל הואיל ו- (1) ההפרעה הורסת את מבנה מרחב הפתרונות, יש אינסוף פתרונות לפני ההפרעה, ורק אחד אחרי, ו-(2) אנחנו רואים שהפרעות קטנות שונות מביאות לתוצאות שונות לחלוטין, הייתי אומר שהמטריצה כן רגישה לשינויים קטנים. ולכן מצב המטריצה רע.

אם היינו משנים קצת לא את הרכיבים של המטריצה, אלה את הרכיבים של הווקטור בצד ימין, היינו מקבלים שאין פתרון למערכת, עוד סימן של רגישות. בנוסף אפשר להגיד שאם הדטרמיננט של מטריצה היא קטנה מאוד (אבל הרכיבים לא), אזי הרכיבים של מטריצה ההופכית יהיו גדולים מאוד, ולכן הנורמה שלו יהיה גדול. זאת אומרת, דטרמיננט קטן $\Leftarrow$ מספר מצב גדול. למטריצה עם דטרמיננט 0, אפשר להגיד שמספר המצב אינסופי, כלומר המצב רע מאוד!

8. א. כאשר משתמשים בשיטה $x_{n+1} = 1 - \frac{x_n^5}{10}$ לפטור את המשוואה $\frac{x^5}{10} + x - 1 = 0$, החל מקירוב ראשון $x_0 = 1$, מקבלים תוצאות כדלהלן:

n	1	2	3	4	5	6	7
x_n	0.9000000	0.9409510	0.9262376	0.9318271	0.9297451	0.9305264	0.9302340

n	8	9	10	11	12	13	14
x_n	0.9303436	0.9303026	0.9303179	0.9303122	0.9303143	0.9303135	0.9303138

בדוק שההתכנסות של תוצאות אלה היא ליניארית, ומצא את גורם ההתכנסות, גם מניתוח התוצאות, וגם מהתוצאה התאורטית המתאימה.

ב. התוצאות עם שיטת ניוטון, עבור אותה משוואה, החל מקירוב ראשון $x_0 = 2$, הם

n	1	2	3	4
x_n	1.5333333333333	1.1664448298875	0.9678691374272	0.9311687131302

n	5	6	7	8
x_n	0.9303141663327	0.9303137377807	0.9303137377806	0.9303137377806

הראה שההתכנסות כאן היא ריבועית, כלומר, קיים קבוע A כך של-n מספיק גבוה, אם הטעות ב-x_n היא ϵ, אזי הטעות ב-x_{n+1} היא בערך $A\epsilon_n^2$.

א. מהתוצאות אנחנו רואים של-6 ספרות דיוק השורש הוא 0.930314. נסתכל על הטעויות בסיבובים $n = 5, 6, 7, 8, 9$ (לדוגמה):

n	5	6	7	8	9
טעות	0.000569	0.000212	0.000080	0.000030	0.000011

בכל סיבוב הטעות יורדת על ידי גורם של כ-2.7. ככה אנחנו רואים (מניתוח התוצאות) שהתכנסות היא ליניארית, עם גורם התכנסות בערך $0.37 \approx 1/2.7$.
מבחינה תאורטית, הרקורסיה $x_{n+1} = \phi(x_n)$ מתכנסת לנקודת השבת x^* בתנאי ש-$|\phi'(x^*)| < 1$, ו-$|\phi'(x^*)|$ הוא גורם ההתכנסות. כאן $\phi(x) = 1 - x^5/10$, $\phi'(x) = -x^4/2$, ו-$\phi'(0.930314) \approx 0.375$, בהתאם לתוצאה הקודמת.

ב. מהתוצאות אנחנו רואים של-13 ספרות דיוק השורש הוא 0.9303137377806. הטעויות בסיבובים $n = 2, 3, 4, 5, 6$ הם

n	2	3	4	5	6
טעות	0.236	0.0375	0.000854	0.000000428	$< 10^{-13}$

רואים יחס בין הטעויות ש-$\epsilon_{n+1} = A\epsilon_n^2$ עם $A \approx 0.6$. (מבחינה תאורטית כאן, כאשר פותרים $f(x) = 0$ עם שיטת ניוטון, $A = f''(x^*)/2f'(x*)$. כאן $f(x) = \frac{x^5}{10} + x - 1$, ולכן $A = 2x^{*3}/(2 + x^{*4}) \approx 0.59$.)

9. א. הוכח, על ידי ההצבה $x = \sin^2\theta$ ש-

$$\int_0^1 x^a(1-x)^b dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2a+1}\theta\cos^{2b+1}\theta\ d\theta \quad .$$

ב. במקרה $a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{2}$, מצא קירובים לשני האנטגרלים בסעיף א על ידי כלל הטרפז עם 4 ועם 8 תת-קטעים (לכל אנטגרל יש להשתמש גם ב-4 וגם ב-8 תת-קטעים).

ג. לפי דעתך, איזה מ-2 האנטגרלים נותן תוצאות יותר מדויקות? הסבר!

א. אם $x = \sin^2\theta$, $dx = 2\sin\theta\cos\theta\ d\theta$. כאשר $\theta = 0$, $x = 0$, וכאשר $\theta = \frac{\pi}{2}$, $x = 1$. ולכן

$$\int_0^1 x^a(1-x)^b dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2a}\theta\cos^{2b}\theta\cdot 2\sin\theta\cos\theta d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2a+1}\theta\cos^{2b+1}\theta\ d\theta$$

ב. כלל טרפז לקירוב אנטגרל על הקטע $[a,b]$ עם אורך תת-קטע h:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left(f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) + \ldots + 2f(b-h) + f(b)\right)$$

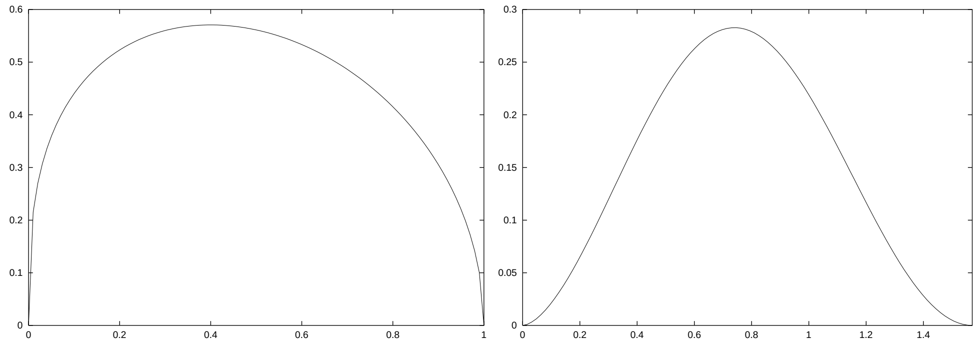
לכן:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^{1/3}(1-x)^{1/2}dx &\approx \frac{1}{8}\left(0.000 + 2*0.546 + 2*0.561 + 2*0.454 + 0.000\right) \\
&\approx 0.390 \\
\int_0^1 x^{1/3}(1-x)^{1/2}dx &\approx \frac{1}{16}\left(0.000 + 2*0.468 + 2*0.546 + 2*0.570\right. \\
&\quad \left. +2*0.561 + 2*0.524 + 2*0.454 + 2*0.338 + 0.000\right) \\
&\approx 0.432 \\
2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{5/3}\theta\cos^2\theta\ d\theta &\approx \frac{\pi}{16}\left(0.000 + 2*0.344 + 2*0.561 + 2*0.257 + 0.000\right) \\
&\approx 0.456 \\
2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{5/3}\theta\cos^2\theta\ d\theta &\approx \frac{\pi}{32}\left(0.000 + 2*0.126 + 2*0.344 + 2*0.519\right. \\
&\quad \left. +2*0.561 + 2*0.454 + 2*0.257 + 2*0.074 + 0.000\right) \\
&\approx 0.458
\end{aligned}$$

ג. היות ויש פחות שינוי בתוצאות אם עושים את האנטגרל על θ, כנראה זה נותן את התוצאות היותר מדוייקות. ניתן להסביר את זה בכמה דרכים:

(1) הפונקציה $x^{1/3}(1-x)^{1/2}$ אינה גזירה לא ב-$x=0$ ולא ב-$x=1$. כלל הטרפז מסתמך על ביון ליניארי על כל תת-קטע, והחסם הסטנדרטי לשגיאה בביון ליניארי משתמש בנגזרת השנייה. אי-קיום הנגזרת מצביע על אי-דיוק גדול בביון ליניארי, ולכן גם בטרפז. לפונקציה $\sin^{5/3}\theta\cos^2\theta$ גם אין נגזרת שנייה ב-$\theta=0$, אבל הבעייה פחות חמורה.

(2) גם ניתן להסביר מצורת הגרפים של 2 הפונקציות שטרפז יעבוד יותר טוב עבור האנטגרל על θ. מהגרף של $x^{1/3}(1-x)^{1/2}$ (שמאלי למטה) רואים שיהיה טעות גדולה בטרפז בתת-קטע הראשון והאחרון.



10. בשאלה זאת נדון בקירובים לפונקציה $\sin(bx)$, כאשר $0 < b \leq \frac{\pi}{2}$, על הקטע $[-1,1]$. ל-b נתון, נחפש a כך ש-ax הוא קירוב טוב ל-$\sin(bx)$.

א. הסבר, דרך גרף, למה יש לבחור a כך ש- $\sin b \leq a \leq b$.

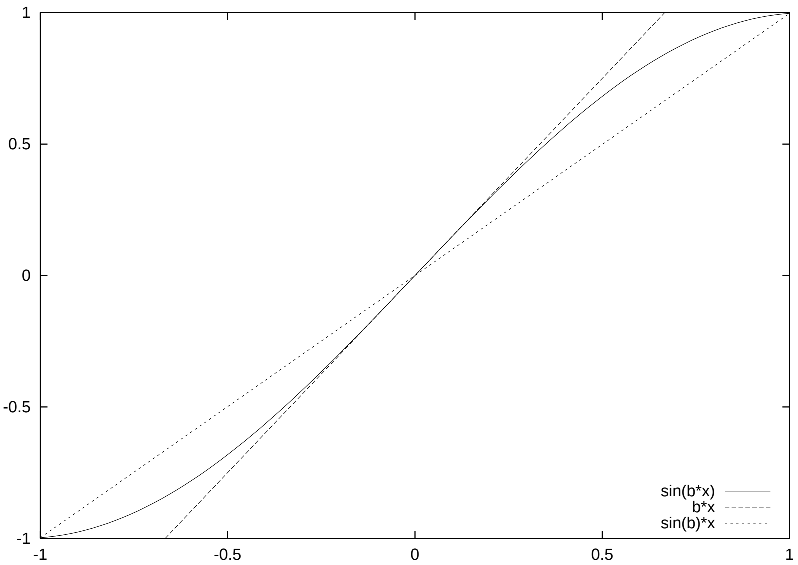
ב. איזה בחירה של a נובעת מהדרישה ש-

$$S_w = \int_{-1}^{1} w(x)(ax - \sin(bx))^2 dx$$

יהיה מנימלי? כאן $w(x)$ היא פונקציית משקל כל שהיא על הקטע $[-1,1]$.

ג. הוכח שה-a שמצאת בסעיף ב ממלא את הקריטריון שהסברת בסעיף א.

א. מהגרף למטה רואים שהפונקציה $\sin(bx)$ נמצאת, בקטע $[-1,1]$, בין הגרף של bx ובין הגרף של $x \sin b$. ולכן יש לקחת $\sin b \leq a \leq b$.



ב. כדי לבחור a כך ש-S_w יהיה מינימלי, יש לדרוש $dS_w/da = 0$, כלומר

$$\int_{-1}^{1} w(x)x(ax - \sin(bx))dx = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\int_{-1}^{1} w(x)x \sin(bx)dx}{\int_{-1}^{1} w(x)x^2 dx}$$

ג. כדי להראות שה-a הזה מקיים את התנאי $\sin b \leq a \leq b$, יש להשתמש בתוך האינטגרל במונה באי-השיוויון $x \sin(b) \leq \sin(bx) \leq bx$.