בס"ד

כלים לאנליזה נומרית 88-276

תרגילים 4 (המשך)

1. מצא את הקו $y = ax + b$ שהוא הקירוב הכי טוב (במובן של ריבועים מזעריים) לנתונים הבאים:

x_n	1	2	3	4	5	6	7
y_n	1.1	2.3	4.9	6.2	7.2	8.6	9.5

2. מצא את הפרבולה $y = a + bx + cx^2$ שהוא הקירוב הכי טוב (במובן של ריבועים מזעריים) לנתונים הבאים:

x_n	1	2	3	4	5	6	7	8
y_n	0.5	-0.3	-1.2	-0.9	0.2	2.4	4.0	7.5

יש למצוא את a, b, c

(א) בהנחה שנותנים משקל שווה לכל הנקודות.

(ב) בהנחה שנותנים משקל 0.5 לשתי הנקודות הקיצוניות מימין ושתי הנקודות הקיצוניות משמאל, ומשקל 1.0 ל-4 נקודות באמצע.

(ג) בהנחה שנותנים משקל 1.0 לשתי הנקודות הקיצוניות מימין ושתי הנקודות הקיצוניות משמאל, ומשקל 0.5 ל-4 נקודות באמצע.

בדוק את הרגישות של a, b, c לשינויים קלים בנתונים. (כלומר: אם משנים אחד הנתונים על ידי 1%, בכמה אחוז זה משנה את a, b, c?)

3. אם $y = ax + b$ הוא הקו הישר שמקבלים בקירוב של ריבועים מזעריים לנקודות $\{(x_i, y_i)\}$ (כאשר לנקודה (x_i, y_i) מייחסים משקל w_i), מצא:

(א) את הקו שמקבלים בקירוב של ריבועים מזעריים לנקודות $\{(x_i + t, y_i + s)\}$ (כלומר, אותם נקודות אחרי הזזה)

(ב) את הקו שמקבלים בקירוב של ריבועים מזעריים לנקודות $\{(sx_i, ty_i)\}$ (כלומר, אותם נקודות אחרי הגדלה/הקטנה)

(ג) את הקו שמקבלים בקירוב של ריבועים מזעריים לנקודות

$$\{(x_i \cos\theta + y_i \sin\theta, y_i \cos\theta - x_i \sin\theta)\}$$

(כלומר, אותם נקודות אחרי סיבוב)

4. (א) מצא את הפולינום $p(x)$ מדרגה 4 או פחות שהוא הקירוב הכי טוב לפונקציה $e^x \sin x$ על הקטע $[-1, 1]$, במובן שסכום השאריות

$$S = \int_{-1}^{1} (e^x \sin x - p(x))^2 \, dx$$

הוא כמה שאפשר יותר קטן. העזר ב-Maple!

(ב) מצא את הפולינום $p(x)$ מדרגה 4 או פחות שהוא הקירוב הכי טוב לפונקציה $f(x) = (1 - |x|)/(1 + x^2)$ על הקטע $[-1, 1]$, במובן שסכום השאריות

$$S = \int_{-1}^{1} (f(x) - p(x))^2 \, dx$$

הוא כמה שאפשר יותר קטן. העזר ב-Maple!

(ג) מצא את הפולינום $p(x)$ מדרגה 4 או פחות שהוא הקירוב הכי טוב לפונקציה $\sqrt{x}$ על הקטע $[1,9]$, במובן שסכום השאריות

$$S=\int_1^9 (\sqrt{x}-p(x))^2\ dx$$

הוא כמה שאפשר יותר קטן. העזר ב-Maple!

5. רוצים לעשות קירוב לפונקציה $\sin x$ בקטע $-\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}$ על ידי פולינום מהצורה

$$ax+bx^3+cx^5$$

. השווה את 3 הקירובים הבאים על ידי בדיקת צורת הגרף של $|\sin x-ax-bx^3-cx^5|$:

(א) הקירוב שמקבלים מטור טיילור, $a=1$, $b=-\frac{1}{6}$, $c=\frac{1}{120}$

(ב) הקירוב שמקבלים על ידי שיטת ריבועים מזעריים עם פונקצית משקל $w(x)=1$

(ג) הקירוב $a=0.999695$, $b=-0.165670$, $c=0.00751339$ (מקבלים את זה מריבועים מזעריים עם $w(x)=(\pi^2-4x^2)^{-\frac{1}{2}}$)