בס"ד

כלים לאנליזה נומרית 88-276, פרופ' ג'. שיף

מועד ב', סמסטר ב', תשס"ג

זמן המבחן: שעתיים וחצי.

מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.

בחלק א' (50% של הציון) יש לענות על כל השאלות (ניקוד כל השאלות בחלק שווה)

בחלק ב' (50% של הציון) יש לענות על 2 מהשאלות (ניקוד כל השאתות בחלק שווה)

חלק א'

1. הסבר, בקצרה, מהוא הפירוק לערכים סינגולריים של מטריצה. איך מזהים את הדרגה של מטריצה מתוך פירוק זה? באיזה פקודה משתמשים לחישוב פירוק זה ב-Matlab?

2. הפונקציה $f(x)=\cos(\sin(4x(1-x)))+\frac{1}{4}x$ היא חד-מודלית בקטע $[0.1,0.9]$. העזר בשלושה סיבובים של חיפוש יחס הזהב למצוא קטע יותר מצומצם שבו נמצא המינימום.

3. מצא את הישר $y=ax+b$ שהוא הקירוב הכי טוב, במובן של ריבועים מזעריים, לנתונים הבאים:

x_i	0	1	2	3	4
y_i	1.2	2.7	3.9	5.3	6.3
w_i	0.5	1	1	1	0.5

(w_i הוא המשקל שיש ליחס לנקודה (x_i,y_i).)

4. מצא, דרך שיטת ניוטון, את הפולינום מדרגה 3 או פחות שהוא עובר דרך הנקודות

x_i	0	1	2	4
y_i	0	3	3	2

יש לכתוב את התשובה הסופית בצורה הסטנדרטית ax^3+bx^2+cx+d.

5. כאשר משתמשים בכלל הטרפז למצוא את האינטגרל $\int_{-1}^{1} f(x)dx$, כאשר

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x}{e^x-1} & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$$

מקבלים תוצאות כדלהלן:

מספר צעדים	קריוב
10	2.0560847540709
20	2.0552781149770
40	2.0550764783692
80	2.0550260706642

העזר בשיטת רומברג למצוא הקירוב הכי טוב לאנטגרל שאפשר.

6. הפונקציה $y(t)$ פותרת את הבעיה

$$y'=y^2+t\ ,\qquad y(0)=0$$

איזה פקודות היית כותב ב-Matlab כדי למצוא קירוב ל-$y(1)$. (יש רק להסביר את השיטה ode23.)

חלק ב'

1. לפי התאוריה, עבור x קטן

$$\frac{1-\cos x}{x^2} \approx 0.5$$

כאשר מנסים לבדוק את זה ב-Matlab, על ידי שכותבים

```
x = [1e-9 1e-8 1e-7 1e-6 1e-5 1e-4 1e-3 1e-2 1e-1]
(1-cos(x))./x.^2
```

מקבלים את התוצאה

```
0             0             0.499600361   0.500044450   0.500000041
0.499999997   0.499999958   0.499995833   0.499583472
```

(התוצאות נכתבו ל-10 ספרות דיוק). למה השגיאות עולות עבור ה-x'ים היותר גדולים והיותר קטנים? למה מקבלים 0 עבור x קטן מדי? הסבר את התוצאות.

תזכורת: $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \ldots$.

2. (א) מהו פירוק LU של מטריצה? איך ניתן להשתמש בפירוק LU של המטריצה הריבועית A לפתור את המשוואה $Ax = b$?

(ב) האם המטריצות

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נותנות פירוק LU של המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 11 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ?$$

(ג) העזר במטריצות L ו-U מסעיף (ב) למצוא את הפתרון הכללי למשוואה

$$\begin{pmatrix} -8 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 11 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(רמז: הוסיפו עוד שורה למשוואה!)

3. (א) כתוב את רקורסית ניוטון לפתרון המשוואה $f(x)=0$ כאשר $f(x)=\ln x-1$. למה הרקורסיה לא תצליח למצוא את השורש $x=e$ אם מתחילים מ-x_0 כאשר $x_0>e^2$? הפעל את הרקורסיה 6 פעמים החל מ- $x_0=7$.

(ב) כתוב את רקורסית ניוטון לפתרון המשוואה $f(x)=0$ כאשר $f(x)=(\ln x-1)^2$. למה הרקורסיה לא תצליח למצוא את השורש $x=e$ אם מתחילים מ-x_0 כאשר $x_0>e^3$? הפעל את הרקורסיה 6 פעמים החל מ- $x_0=7$.

(ג) בתוצאות של סעיפים (א) ו-(ב), איזה משתי הרקורסית מגיעה יותר קרוב לשורש אחרי 3 סיבובים (החל מ- $x_0=7$)? ואיזה אחרי 6 סיבובים?

(ד) הסבר: שיטת ניוטון למשוואה $(f(x))^2=0$ אולי תצליח להגיע קרוב לשורש יותר מהר משיטת ניוטון למשוואה $f(x)=0$, אבל בסוף שיטת ניוטון למשוואה $f(x)=0$ תמיד תגיע יותר מהר לדיוק גבוה.

4. רוצים לעשות קירוב לפונקציה

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x\geq 0 \\ -x^2 & x\leq 0 \end{cases}$$

על ידי פולינומים מדרגה 3.

(א) מצא קירוב כזה על ידי השיטה הסטנדרטית של ריבועים מזעריים (כלומר: מצא פולינום $p(x)$ מדרגה 3 או פחות כך ש-

$$\int_{-1}^{1}(f(x)-p(x))^2dx$$

הוא מינימלי). רמז: שים לב ש-$f(x)$ היא פונקציה אי-זוגית!

(ב) צייר גרף של הפונקציה $f(x)$ עם הפולינום $p(x)$ שמצאת בסעיף (א). כמה פעמים הם חותכים זה את זה בקטע $[-1,1]$? (הערה: אם לא הצלחת לקבל תשובה סופית בסעיף (א), או יש סיבה לחשוש שהתשובה שקבלת איננה נכונה, ניתן לעבוד בסעיף הזה "כאילו" התשובה מסעיף (א) היא $p(x)=\frac{3}{4}x^3+\frac{9}{32}x$, גם כי זה לא התשובה הנכונה!)

(ג) אם רוצים קירוב פולינומי לפונקציה $f(x)$ דווקא בצורה

$$q(x)=ax+(1-a)x^3$$

(ככה מקבלים ש-$q(\pm1)=\pm1=f(\pm1)$), איך היית בוחר את הפרמטר a ? ניתן או להציע שיטה אחת לבחור את a וגם למצוא את הערך של a לפי שיטה זו, או להציע שתי שיטות שונות לבחור את a.