בס"ד

כלים לאנליזה נומרית 88-276, פרופ' ג'. שיף

מועד א', סמסטר ב', תשס"ג

זמן המבחן: שעתיים וחצי.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.
בחלק א' (50% של הציון) יש לענות על כל השאלות (ניקוד כל השאלות בחלק שווה)
בחלק ב' (50% של הציון) יש לענות על 2 מהשאלות (ניקוד כל השאתות בחלק שווה)

חלק א'

1. הסבר, בקצרה, איך Matlab מגיב לפקודה `A\b`, כאשר `A` היא מטריצה מגודל $m \times n$ ו-`b` הוא ווקטור ממימד m. (יש להתייחס לכל המקרים, $m > n$, $m = n$, ו-$m < n$).

תשובה: אם יש פתרון למשוואה $Ax = b$, הפקודה $A\backslash b$ ימצא פתרון למשוואה. כאשר $m = n$ ו-$\det A \neq 0$, כך שיש פתרון יחיד למשוואה, נקבל פתרון זה. במקרה $n > m$, שיש יותר משתנים ממשוואות, ובאופן כללי יש יותר מפתרון אחד, נקבל אחד הפתרונות. אם אין פתרון למשוואה $Ax = b$, מה שבדרך כלל קורה כאשר $n > m$, הפקודה תתן x כך ש-$||Ax - b||_2$ הוא מינימלי.

2. למשוואה $x = e^{-x}$ יש פתרון בין $x = 0$ ו-$x = 1$. העזר או בחציית הקטעים או בשיטת ניוטון למצוא את השורש ל-3 ספרות דיוק.

דרך ניוטון: נגדיר $f(x) = x - e^{-x}$. אנחנו רוצים שורש של f, ניתן להשתמש בשיטת ניוטון

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n - e^{-x_n}}{1 + e^{-x_n}}$$

אם ניקח $x_0 = 0.5$ מקבלים

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.5663 \\ x_2 &= 0.5671 \\ x_3 &= 0.5671 \end{aligned}$$

ולכן ל-3 ספרות דיוק השורש הוא 0.567.

על ידי חציית הקטעים: נגדיר $f(x) = x - e^{-x}$, אזי $f(0) < 0$, $f(1) > 0$.

$$\begin{aligned} f(0.5) &< 0 \\ f(0.75) &> 0 \\ f(0.625) &> 0 \\ f(0.5625) &< 0 \\ f(0.5937) &> 0 \\ f(0.5781) &> 0 \\ f(0.5703) &> 0 \\ f(0.5664) &< 0 \\ f(0.5684) &> 0 \\ f(0.5674) &> 0 \\ f(0.5669) &< 0 \end{aligned}$$

ולכן הורש בין 0.5669 ו-0.5674, ולכן השורש ל-3 ספרות דיוק הוא 0.567.

3. מצא את הפולינום מדרגה 2 או פחות שהוא הקירוב הכי טוב, במובן של ריבועים מזעריים, לפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x-1} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

על הקטע $[-1,1]$. ניתן להשתמש בתוצאות

$$\int_{-1}^{1} \frac{x}{e^x-1}dx \approx 2.0550093 \ , \qquad \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{e^x-1}dx = -\frac{1}{3} \ , \qquad \int_{-1}^{1} \frac{x^3}{e^x-1}dx \approx 0.6996104 \ .$$

תשובה: קירוב לפונקציה $f(x)$ על ידי פולינום $p(x)$ מדרגה עד 2 נתון על ידי

$$p(x) = a_0P_0(x) + a_1P_1(x) + a_2P_2(x)$$

כאשר

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_0(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{x}{e^x-1}dx \approx 1.027 \\ a_1 &= \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_1(x)dx = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{e^x-1}dx \approx -0.5000 \\ a_2 &= \frac{5}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_2(x)dx = \frac{5}{2}\int_{-1}^{1} \frac{x\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)}{e^x-1}dx \approx 0.0548 \end{aligned}$$

ולכן אנחנו מקבלים

$$p(x) = 1.027 - 0.5000x + 0.0548\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right)$$

4. כתוב את כל הפקודות שהיית כותב ב-Matlab כדי לקבל גרף של פונקציה, הנראית חלקה לעין, העוברת דרך הנקודות

x_i	0	1	2	4	5	6	8	10
y_i	0	3	3	5	7	7	3	0

תשובה: הכי קל להשתמש ב-cubic spline (נגזרת שנייה חלקה - כלומר חלקה לעיין). כותבים

```
x  = [ 0 1 2 4 5 6 8 10]
y  = [ 0 3 3 5 7 7 3 0 ]
xx = [0 : 0.05 : 10]
yy = spline(x,y,xx)
plot(xx,yy)
```

פקודות אלה מחשבים את הערכים של ה-cubic spline ב-200 נקודות בין 0 ל-01, ואזי מציירים גרף מבוסס על ערכים אלה

5. מצא, על ידי כלל סמפסון עם $h=\frac{1}{2}$, קירוב לאינטגרל $\int_{-1}^{1} f(x)dx$, כאשר

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x}{e^x-1} & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$$

תשובה: על ידי כלל סמפסון עם $h=\frac{1}{2}$:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{1}{6}\left(f(-1)+4f(-0.5)+2f(0)+4f(0.5)+f(1)\right)$$

במקרה שלנו יש לנו

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \frac{x}{e^x-1}dx &\approx \frac{1}{6}(1.581977+4\times 1.270747+2\times 1+4\times 0.770747+0.5819767)\\ &\approx 2.05499\end{aligned}$$

6. הפונקציה $y(t)$ פותרת את הבעיה

$$y'=y^2+t\ , \qquad y(0)=0$$

העזר בשיטת אויילר עם $h=\frac{1}{4}$ למצוא קירוב ל-$y(1)$.

תשובה: שיטת אויילר לפתרון $y'=f(t,y)$ הוא

$$y_{n+1}=y_n+hf(t_n,y_n)$$

במקרה שלנו $f(t,y)=y^2+t$. יש לנו

$$\begin{array}{lcllcl} y(0) &=& 0 & & & \\ y(0.25) &\approx& 0+0.25f(0,0) &=& 0 \\ y(0.5) &\approx& 0+0.25f(0.25,0) &=& 0.0625 \\ y(0.75) &\approx& 0.0625+0.25f(0.5,0.625) &\approx& 0.1885 \\ y(1) &\approx& 0.1885+0.25f(0.75,0.1885) &\approx& 0.3849 \end{array}$$

1. (א) מהו פירוק QR של מטריצה? איך ניתן להשתמש בפירוק QR של המטריצה A לפתור את המשוואה $Ax = b$?

(ב) למטריצה

$$A = \begin{pmatrix} -0.8946 & 0.8944 & 1.11805 \\ 1.7888 & 0.4473 & 0.0001 \end{pmatrix}$$

יש פירוק QR

$$A = \begin{pmatrix} -0.4473 & 0.8944 \\ 0.8944 & 0.4473 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

העזר בזה למצוא את הפתרון הכללי למשוואה

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

תשובה: (א) אם A היא מטריצה ממשית (מרוכבת) מגודל $m \times n$ ניתן לכתוב $A = QR$ כאשר Q היא מטריצה אורתוגונלית (אוניטרית) מגודל $m \times m$, ו-R היא מטריצה משולשת עליון מגודל $m \times n$. כאן הכוונה של אורתוגונלית (אוניטרית) היא ש-$QQ^T = I$ ($QQ^H = I$), והכוונה של משולשת עליון היא ש-$R_{ij} = 0$ כאשר $i > j$.

אם $A = QR$ הוא פירוק QR של המטריצה A ו-$Ax = b$, אזי

$$QRx = b \qquad \Rightarrow \qquad Rx = Q^T b$$

(בגלל ש-Q אורתוגונלית). לכן למצוא את הפתרון של $Ax = b$ יש לחשב $Q^T b$, ואח"כ לפתור את המערכת $Rx = Q^T b$, שזה לא קשה בגלל ש-R היא משולשת עליון.

(ב) עושים לפי מה שכתבנו בסעיף (א). היות ו-A הוא מגודל 2×3, אנחנו מנסים לפתור

$$\begin{pmatrix} -0.8946 & 0.8944 & 1.11805 \\ 1.7888 & 0.4473 & 0.0001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

על ידי פירוק ה-QR זה נותן ש-

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.4473 & 0.8944 \\ 0.8944 & 0.4473 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4471 \\ 1.3417 \end{pmatrix}$$

(שים לב ש-$Q^T = Q$). ולכך יש לנו:

$$x_1 = 0.5(0.4471 + 0.5x_3) = 0.22351 + 0.25x_3 \ , \qquad x_2 = 1.3417 - x_3$$

2. א. מצא את פולינום הביון $p(x)$ עבור הנתונים הבאים:

$$\begin{array}{c|ccccc} x_i & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y_i & 4 & 1 & \alpha & 1 & 4 \end{array}$$

כאשר α הוא מספר ממשי כל שהוא.

ב. הוכח שהפולינום $p(x)$ שמצאת בסעיף א. מקיים $p'(0) = 0$, כלומר יש ל-$p(x)$ נקודה קריטית כאשר $x = 0$. האם יש ל-$p(x)$ עוד נקודות קריטיות?

ג. איך נראה הגרף של $p(x)$? יש לצייר בשלושת המקרים $\alpha < 0$, $0 < \alpha < \frac{4}{5}$, $\alpha > \frac{4}{5}$.

תשובה: (א) נשתמש בשיטת ההפרשים הסופיים של ניוטון. טבלת ההפרשים מחולקים היא:

$$\begin{array}{c|lllll} -2 & 4 & & & & \\ -1 & 1 & -3 & & & \\ 1 & 1 & 0 & 1 & & \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 0 & \\ 0 & \alpha & 2-\frac{1}{2}\alpha & 1+\frac{1}{2}\alpha & \frac{1}{2}\alpha & \frac{1}{4}\alpha \end{array}$$

ולכן פולינום הביון הוא

$$\begin{aligned} p(x) &= 4-3(x+2)+(x+1)(x+2)+\frac{\alpha}{4}(x+2)(x+1)(x-1)(x-2) \\ &= x^2+\frac{\alpha}{4}(x^2-4)(x^2-1) \end{aligned}$$

(ב) היות ו-$p(x)$ היא פונקציה של x^2, ברור ש-$p'(0) = 0$. ביותר כלליות יש לנו

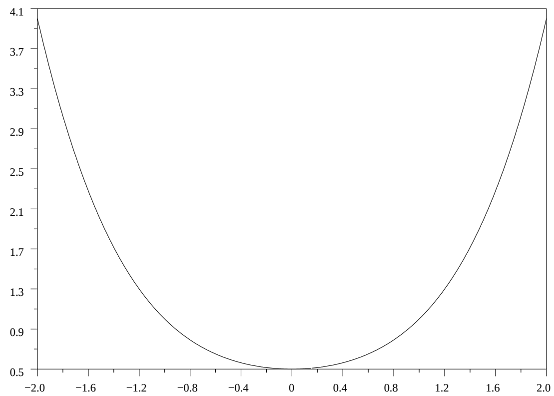
$$p'(x) = 2x+\frac{\alpha}{4}(4x^3-10x) = x\left(2+\frac{\alpha}{2}(2x^2-5)\right)$$

ולכן יש עוד פתרונות של $p'(x) = 0$ כאשר

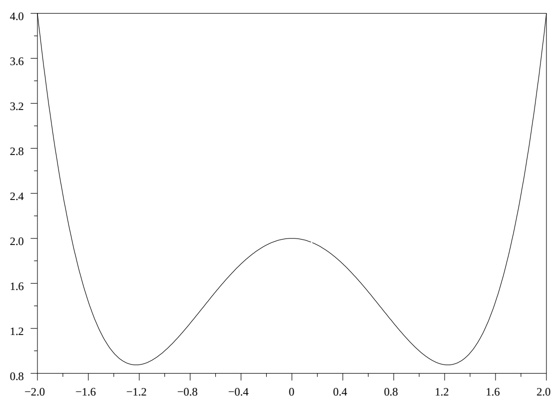
$$2x^2-5 = -\frac{4}{\alpha} \qquad \Rightarrow \qquad x^2 = \frac{1}{2}\left(5-\frac{4}{\alpha}\right)$$

(כאן הנחנו $\alpha \neq 0$. ברור שאין עוד פתרון אם $\alpha = 0$.) מסקנה: יש עוד שני פתרונות של $p'(x) = 0$ אם α שלילי או $\alpha > \frac{4}{5}$.

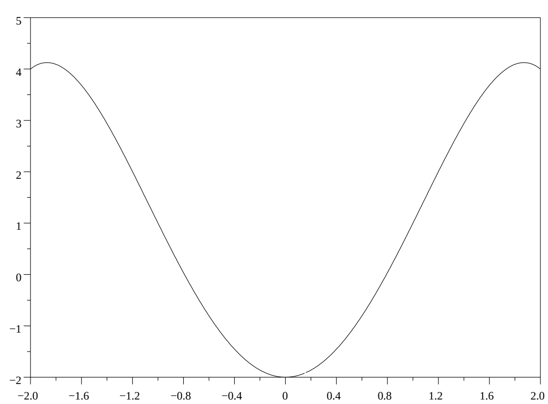
(ג) אם $0 \le \alpha \le \frac{4}{5}$ אין עוד נקודות קריטיות, הגרף נראה כמו פרבולה עם מינימום כאשר $x = 0$. אם $\alpha > \frac{4}{5}$, הנקודה $x = 0$ היא מקסימום, ויש שני מינימומים, אחד בקטע $[0,1]$, השני בקטע $[-1,0]$. אם α שלילי הנקודה $x = 0$ היא שוב מינימום, ויש שני מקסימומים (לא בהכרח בקטע $[-2,2]$). איורים בעמוד הבא.



$\alpha = \frac{1}{2}$



$\alpha = 2$



$\alpha = -2$

3. כאשר מחשבים קירובים לאינטגרלים

$$I_1 = \int_0^1 \sin(\pi t^2)dt \ , \qquad I_2 = \int_1^2 \sin(\pi t^2)dt \ , \qquad I_3 = \int_2^3 \sin(\pi t^2)dt$$

על ידי כלל הטרפז עם $n = 100, 200, 400, 800$ צעדים, מקבלים תוצאות כדלהלן:

n	קירוב ל- I_1	קירוב ל- I_2	קירוב ל- I_3
100	0.5048022307908	−0.2303619778806	0.1319583705883
200	0.5048415039290	−0.2304798166837	0.1321548332600
400	0.5048513216079	−0.2305092709317	0.1322039277118
800	0.5048537759898	−0.2305166341531	0.1322161999997

(א) העזר בשיטת רומברג למצוא קירוב טוב לכל אחד משלושה האינטגרלים.

(ב) עבור כל אחד מהאינטגרלים, איך הטעויות בקירובים (על ידי כלל הטרפז) מתנהגות כאשר מגדילים את מספר הצעדים n ?

(ג) עבור מספר צעדים קבוע, איזה יחס קיים בין הטעויות בקירובים של שלושה האינטגרלים? האם ניתן להציע הסבר תאורטי לכך?

תשובה: (א) האינטגרל הראשון: טבלת רומברג

n				
100	022307908			
200	415039290	5459497		
400	513216079	5459416	5459411	
800	537759898	5459411	5459411	5459411

(כאן בכוונה עבדתי למספר מצומצם של ספרות בגלל שיש מחשבי כיס בעלי רק 8 ספרות דיוק). תשובה "טובה": 0.50485459411.

האינטגרל השני: טבלת רומברג

n				
100	3619778806			
200	4798166837	5190962		
400	5092709317	5190890	5190885	
800	5166341531	5190885	5190885	5190885

תשובה טובה: -0.2305190885.

האינטגרל השלישי:

n				
100	−0416194217			
200	1548332600	2203174		
400	2039277118	2202925	2202908	
800	2161999997	2202907	2202906	2202906

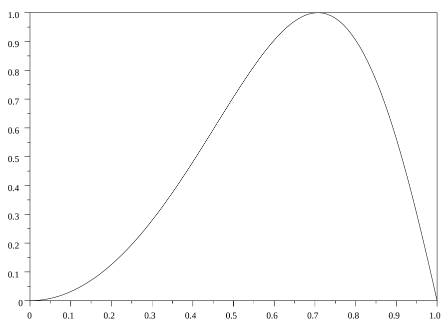
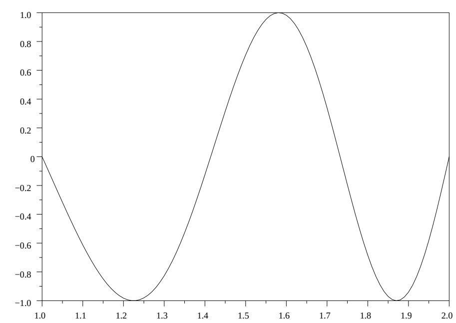
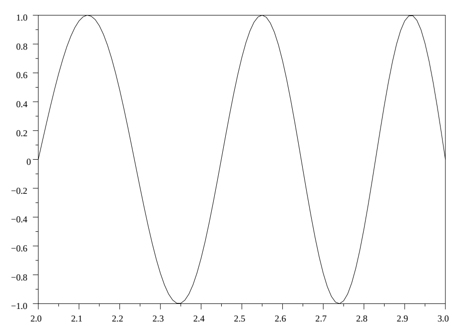
תשובה "טובה": 0.1322202908.

(ב) עכשיו אנחנו יכולים לכתוב את הטעויות בטבלה המקורית:

n	טעות בקירוב ל- I_1	טעות בקירוב ל- I_2	טעות בקירוב ל- I_3
100	0.00005236322	0.0001571106	0.0002619202
200	0.00001359018	0.0000392718	0.0000654575
400	0.00000327250	0.0000098175	0.0000163631
800	0.00000081812	0.0000024543	0.0000040908

די ברור שכאשר יורדים שורה (כלומר מכפילים n על ידי 2), הטעות יורדת על ידי גורם של בערך 4, בדיוק לפי התאוריה שהטעות בטרפז מתנהגת כ-$\frac{1}{n^2}$.

(ג) רואים שהטעויות בעמודה השנייה של הטבלה הם פי 3 הטעויות בעמודה הראשונה, והטעויות בעמודה השלישית הם פי 5 הטעויות בעמודה הראשונה. זה מאוד סביר, לפי הגרפים של הפונקציה $\sin(\pi t^2)$ על 3 הקטעים:

הפונקציה משתנה פי 3 יותר מהר בקטע $[1,2]$ מבקטע $[0,1]$, ופי 5 יותר מהר בקטע $[2,3]$. וזה משפיע באיכות בקירוב הטרפז.

4. (א) הפונקציה $x(t)$ מקיימת את המשוואה הדפרנציאלית

$$x'' + 49x' + 50x = \frac{49}{1+t}\ , \qquad x(0)=1\ ,x'(0)=-1$$

הסבר איך לכתוב את המשוואה כמערכת משוואות מסדר ראשון, והסבר באיזה פקודות היית משתמש ב-Matlab כדי לפתור את המשוואה, לקבל גרף של הפתרון $x(t)$ עבור t בקטע $[0,10]$.

(ב) כאשר פותרים את הבעייה בסעיף (א) עם שיטת "אויילר משופר" מקבלים את התוצאות הבאות עבור $x(5)$ (כפונקציה של אורך הצעד h):

h	קירוב
$\frac{1}{20}$	2.4835777×10^{11}
$\frac{1}{40}$	0.216049147
$\frac{1}{80}$	0.216047026
$\frac{1}{160}$	0.216046496
$\frac{1}{320}$	0.216046364

לפי התאוריה, התלות של הקירובים על h היא

$$\text{קירוב} \approx a + bh^2$$

כאשר a הוא הערך האמיתי של $x(5)$ ו-b הוא קבוע אחר. השתמש בשיטת ריבועים מזעריים למצוא קירובים ל-a, b. למה יש לזרוק את התוצאה עם $h=\frac{1}{20}$? מה השתבש?

תשובה: (א) אם מגדירים וקטור $\mathbf{x}$ על ידי

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$$

ניתן לכתוב את המשוואה בצורה

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_2 \\ -49\mathbf{x}_2 - 50\mathbf{x}_1 - \frac{49}{1+t} \end{pmatrix}\ , \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

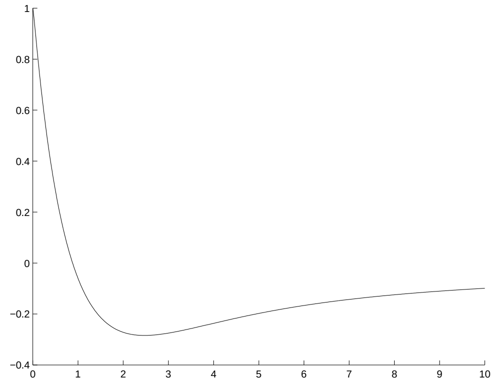
לפתור ב-Matlab: יש להכין קובץ g.m עם התוכן

```
function y=g(t,x)
y = [ x(2) ; -49*x(2)-50*x(1)-49/(1+t) ];
```

ואז לכתוב

```
[t x]=ode45('g',[0 10],[1 -1]);
plot( t, x(:,1) )
```

(אני מדלג על הסברים). מקבלים את הגרף



(ב) רואים שהתוצאה עבור $h = \frac{1}{20}$ איננה טובה. המשוואה היא משוואה קשיחה, ולכן דורשת שימוש ב-h מספיק קטן כדי לקבל פתרון יציב נומרי (לפחות כאשר משתמשים בשיטה מפורשת כמו שיטת אויילר משופר). אין להתייחס לתוצאה זו.

לפי התאוריה התוצאות צריכות להיות פונקציה ליניארית של h^2. הערכים של h^2 ושל הקירובים (מינוס 0.21604 וכפול 10^9) הם

h^2	0.000625	0.000156	0.000039	0.000010
10^9(0.21604 − קירוב)	9147	7026	6496	6364

מקבלים ערכים של A, B כך שהשורה התחתונה היר בערך A ועוד B כפול השורה העליונה על ידי ריבועים מזעריים:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 4 & 0.000830 \\ 0.000830 & 4.17\times 10^{-7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 29033 \\ 7.13 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} &= \frac{1}{9.80\times 10^{-7}} \begin{pmatrix} 4.17\times 10^{-7} & -0.000830 \\ -0.000830 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 29033 \\ 7.13 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 6.32\times 10^{3} \\ 4.51\times 10^{7} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

ולכן הקירוב הוא $0.21604632 + 0.0451h^2$.