בס"ד

כלים לאנליזה נומרית 88-276, פרופ' ג'. שיף

מועד א', סמסטר ב', תשס"ג

זמן המבחן: שעתיים וחצי.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.
בחלק א' (50% של הציון) יש לענות על כל השאלות (ניקוד כל השאלות בחלק שווה)
בחלק ב' (50% של הציון) יש לענות על 2 מהשאלות (ניקוד כל השאתות בחלק שווה)

חלק א'

1. הסבר, בקצרה, איך Matlab מגיב לפקודה `A\b`, כאשר `A` היא מטריצה מגודל $m \times n$ ו-`b` הוא ווקטור ממימד m. (יש להתייחס לכל המקרים, $m > n$, $m = n$, ו-$m < n$).

2. למשוואה $x = e^{-x}$ יש פתרון בין $x = 0$ ו-$x = 1$. העזר או בחציית הקטעים או בשיטת ניוטון למצוא את השורש ל-3 ספרות דיוק.

3. מצא את הפולינום מדרגה 2 או פחות שהוא הקירוב הכי טוב, במובן של ריבועים מזעריים, לפונקציה
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x-1} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$
על הקטע $[-1, 1]$. ניתן להשתמש בתוצאות
$$\int_{-1}^{1} \frac{x}{e^x-1}dx \approx 2.0550093 , \qquad \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{e^x-1}dx = -\frac{1}{3} , \qquad \int_{-1}^{1} \frac{x^3}{e^x-1}dx \approx 0.6996104 .$$

4. כתוב את כל הפקודות שהיית כותב ב-Matlab כדי לקבל גרף של פונקצייה, הנראית חלקה לעין, העוברת דרך הנקודות

x_i	0	1	2	4	5	6	8	10
y_i	0	3	3	5	7	7	3	0

5. מצא, על ידי כלל סמפסון עם $h = \frac{1}{2}$, קירוב לאינטגרל $\int_{-1}^{1} f(x)dx$, כאשר
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x-1} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

6. הפונקציה $y(t)$ פותרת את הבעיה
$$y' = y^2 + t , \qquad y(0) = 0$$
העזר בשיטת אויילר עם $h = \frac{1}{4}$ למצוא קירוב ל-$y(1)$.

חלק ב'

1. (א) מהו פירוק QR של מטריצה? איך ניתן להשתמש בפירוק QR של המטריצה A לפתור את המשוואה $Ax = b$?

(ב) למטריצה

$$A = \begin{pmatrix} -0.8946 & 0.8944 & 1.11805 \\ 1.7888 & 0.4473 & 0.0001 \end{pmatrix}$$

יש פירוק QR

$$A = \begin{pmatrix} -0.4473 & 0.8944 \\ 0.8944 & 0.4473 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

העזר בזה למצוא את הפתרון הכללי למשוואה

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. א. מצא את פולינום הביון $p(x)$ עבור הנתונים הבאים:

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	4	1	α	1	4

כאשר α הוא מספר חיובי כל שהוא.

ב. הוכח שהפולינום $p(x)$ שמצאת בסעיף א. מקיים $p'(0) = 0$, כלומר יש ל-$p(x)$ נקודה קריטית כאשר $x = 0$. האם יש ל-$p(x)$ עוד נקודות קריטיות?

ג. איך נראה הגרף של $p(x)$? יש לצייר בשלושת המקרים $\alpha < 0$, $0 < \alpha < \frac{4}{5}$, $\alpha > \frac{4}{5}$.

3. כאשר מחשבים קירובים לאינטגרלים

$$I_1 = \int_0^1 \sin(\pi t^2)dt \;, \qquad I_2 = \int_1^2 \sin(\pi t^2)dt \;, \qquad I_3 = \int_2^3 \sin(\pi t^2)dt$$

על ידי כלל הטרפז עם $n = 100, 200, 400, 800$ צעדים, מקבלים תוצאות כדלהלן:

n	קירוב ל- I_1	קירוב ל- I_2	קירוב ל- I_3
100	0.5048022307908	-0.2303619778806	0.1319583705883
200	0.5048415039290	-0.2304798166837	0.1321548332600
400	0.5048513216079	-0.2305092709317	0.1322039277118
800	0.5048537759898	-0.2305166341531	0.1322161999997

(א) העזר בשיטת רומברג למצוא קירוב טוב לכל אחד משלושה האינטגרלים.

(ב) עבור כל אחד מהאינטגרלים, איך הטעויות בקירובים (על ידי כלל הטרפז) מתנהגות כאשר מגדילים את מספר הצעדים n ?

(ג) עבור מספר צעדים קבוע, איזה יחס קיים בין הטעויות בקירובים של שלושה האינטגרלים? האם ניתן להציע הסבר תאורטי לכך?

4. (א) הפונקציה $x(t)$ מקיימת את המשוואה הדפרנציאלית

$$x'' + 49x' + 50x = \frac{49}{1+t}\ , \qquad x(0) = 1\ , x'(0) = -1$$

הסבר איך לכתוב את המשוואה כמערכת משוואות מסדר ראשון, והסבר באיזה פקודות היית משתמש ב-Matlab כדי לפתור את המשוואה, לקבל גרף של הפתרון $x(t)$ עבור t בקטע $[0, 10]$.

(ב) כאשר פותרים את הבעייה בסעיף (א) עם שיטת "אויילר משופר" מקבלים את התוצאות הבאות עבור $x(5)$ (כפונקציה של אורך הצעד h):

h	קירוב
$\frac{1}{20}$	2.4835777×10^{11}
$\frac{1}{40}$	0.216049147
$\frac{1}{80}$	0.216047026
$\frac{1}{160}$	0.216046496
$\frac{1}{320}$	0.216046364

לפי התאוריה, התלות של הקירובים על h היא

$$\text{קירוב} \approx a + bh^2$$

כאשר a הוא הערך האמיתי של $x(5)$ ו-b הוא קבוע אחר. השתמש בשיטת ריבועים מזעריים למצוא קירובים ל-a, b. למה יש לזרוק את התוצאה עם $h = \frac{1}{20}$? מה השתבש?