בס"ד

הסתברות כללית 88-262,
מועד ב', סמסטר א', תשס"ב

המרצים: ד"ר מ. גורפיין, ד"ר ג'. שיף
המתרגל: א. נדב

זמן המבחן: שעתיים.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.
עליך לענות על 7 מתוך 10 השאלות. ניקוד כל השאלות שווה.
יש לנמק היטב כל תשובה!

1. על חבילת אורז ממפעל מסויים נרשם כי משקל החבילה הוא 200 גרם. אולם, משקל החבילה אינו מדוייק, ובפועל הוא מתפלג נורמלית עם ממוצע 200 גרם. יהי X המשקל בגרמים של חבילת אורז אקראית.
   א. ידוע כי $\mathbf{P}(X < 193.3) = 0.25$. מהי סטיית התקן של התפלגות משקל החבילה?
   ב. 100 חבילות אורז נבחרו באקראי ביום מסויים. מהי שונות מספר החבילות, מתוך ה-100, שמשקלן נמוך מ-190 גרם?

2. יהי X משתנה מקרי רציף עם פונקציית צפיפות הבאה, התלויה בפרמטר ממשי θ:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-\theta)^2} & x \geq 1+\theta \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

   א. מצא את פונקציית ההצטברות של X, $F_X(x)$.
   ב. אם $\theta = 0$, מה ניתן להגיד על $\mathbf{E}[X]$?

3. שיכור יוצא ממסבאה ומנסה ללכת לביתו. עקב שיכרותו הכיוון של כל צעד שלו הוא משתנה מקרי, שאיננו תלוי בצעדיו הקודמים, וכל צעד הוא לכיוון מזרח בהסתברות p ולכיוון מערב בהסתברות $1-p$. מצא את ההסתברות שאחרי n צעדים הוא נמצא r צעדים מזרחה מפתח המסבאה, כאשר r הוא שלם כל שהוא.

4. 80% מהסטודנטים בקורס בהסתברות הגיעו להרצאות, והיתר לא הגיעו. לסטודנט שהגיע להרצאות הסיכוי לעבור את המבחן (בכל פעם שהוא נבחן) הוא 85%, לסטודנט שלא הגיע הסיכוי הוא רק 50%. כל סטודנט ניגש למבחן עד הפעם הראשונה שמשיג ציון עובר. אם סטודנט מסויים עבר את המבחן בניסיון מספר n (n שלם חיובי) מהי ההסתברות שסטודנט זה כן הגיע להרצאות?

5. חשמלאי רוכש רכיבים חשמליים בחבילות של 10 יחידות. החשמלאי יקנה חבילה רק לאחר שדגם באופן מקרי 3 רכיבים מתוכה ומצא ששלושתם תקינים. ידוע כי 30% מהחבילות עם 4 רכיבים פגומים ו-70% עם רכיב 1 פגום. מהי ההסתברות שהחשמלאי לא יקנה חבילה שבדק?

6. המשתנה המקרי X מקבל את הערכים $\{1,2,3,4\}$ ומתפלג אחיד. המשתנה המקרי Y מתפלג $B(1,\frac{1}{3})$. X ו-Y הם בלתי תלויים.
   א. מצא את ההתפלגות של $X+Y$. מהי השונות של $X+Y$?
   ב. מצא את ההתפלגות של XY. מהי השונות של XY?

7. על סמך נתוני הקבלה, אוניברסיטה מסויימת מסווגת את הסטודנטים המתחילים את לימודי-הם ל-3 סוגים: מצטיינים (10%), טובים (40%) ובינוניים (50%). ההסתברות שסטודנט יעבור לשנה ב' היא 0.9 לסטודנט מצטיין, 0.8 לסטודנט טוב, ו-0.7 לסטודנט בינוני. אם סטודנט מסויים עבר לשנה ב', מהי ההסתברות שהיה, בעת קבלתו ללימודים, בין המצטיינים?

8. אדם קונה כרטיס הגרלה המאפשר לו להשתתף ב-500 הגרלות בלתי-תלויות, כך שבכל הגרלה הסיכוי לזכות הוא $\frac{1}{100}$. מצא קירובים להסתברות לזכות לפחות 5 פעמים
   א. על ידי קירוב פואסון לבינום, ו-
   ב. על ידי הקירוב הנורמלי לבינום.
   איזה קירוב יותר טוב?

9. יהיו A ו-B מאורעות כל שהם. איזה מהטענות הבאות נכונות תמיד? נמק.
   א. $\mathbf{P}(A\cup B)\le \mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)$
   ב. $\mathbf{P}(A\cap B)\le \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$
   ג. $\mathbf{P}(A|B)=1-\mathbf{P}(A|B^c)$
   ד. $\mathbf{P}(A\cup B)=1-\mathbf{P}(A^c\cap B^c)$

10. למשתנה המקרי יש פונקצית צפיפות

$$f_X(x)=\begin{cases}1 & -a-\frac{1}{2}<x<-a\\ 1 & a<x<a+\frac{1}{2}\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

כאשר a הוא פרמטר חיובי גדול.
   א. צייר את הגרף של $f(x)$.
   ב. תן הסבר אינטואיטיבי מדוע נצפה שסטיית התקן תהיה קרובה ל-a.
   ג. חשב את סטיית התקן של X.

בהצלחה!!