הסתברות כללית, 88-262
מועד א', סמסטר א', תשס"ב

המרצים: ד"ר מ. גורפיין, ד"ר ג'. שיף
המתרגל: א. נדב

זמן המבחן: שעתיים.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.
עליך לענות על 7 מתוך 10 השאלות. ניקוד כל השאלות שווה.
יש לנמק היטב כל תשובה!

1. א. מטילים קוביה הוגנת n פעמים, n הוא מספר שלם חיובי. מהי ההסתברות שכל התוצאות שונות זו מזו?
ב. מטילים קוביה הוגנת X פעמים. X הוא משתנה מקרי המתפלג פאוסון עם פרמטר λ. מהי ההסתברות שכל התוצאות שונות זו מזו?

א.

n	1	2	3	4	5	6	≥ 7
הסתברות	1	$\frac{6.5}{6^2}$	$\frac{6.5.4}{6^3}$	$\frac{6.5.4.3}{6^4}$	$\frac{6.5.4.3.2}{6^5}$	$\frac{6.5.4.3.2.1}{6^6}$	0

(נוסחה כללית להסתברות: $\frac{6!}{6^n(6-n)!}$, $n = 1, 2, \ldots, 6$.)

ב.

$$\text{הסתברות} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{P}(X = i \text{ שונים אם})\mathbf{P}(X = i)$$

$$= e^{-\lambda}\left(1 \cdot 1 + \lambda \cdot 1 + \frac{\lambda^2}{2!} \cdot \frac{6.5}{6^2} + \frac{\lambda^3}{3!} \cdot \frac{6.5.4}{6^3} + \frac{\lambda^4}{4!} \cdot \frac{6.5.4.3}{6^4} + \frac{\lambda^5}{5!} \cdot \frac{6.5.4.3.2}{6^5} + \frac{\lambda^6}{6!} \cdot \frac{6.5.4.3.2.1}{6^6}\right)$$

$$= e^{-\lambda}\left(1 + \binom{6}{1}\left(\frac{\lambda}{6}\right) + \binom{6}{2}\left(\frac{\lambda}{6}\right)^2 + \binom{6}{3}\left(\frac{\lambda}{6}\right)^3 + \binom{6}{4}\left(\frac{\lambda}{6}\right)^4 + \binom{6}{5}\left(\frac{\lambda}{6}\right)^5 + \binom{6}{6}\left(\frac{\lambda}{6}\right)^6\right)$$

$$= e^{-\lambda}\left(1 + \frac{\lambda}{6}\right)^6$$

---

2. אם משתנה מקרי X מתפלג $B(n,p)$ עם תוחלת 40 ושונות 30, מצא את הפרמטרים n, p. מצא, בקירוב, את ההסתברות $\mathbf{P}(|X - 40| > 10)$.

$np = 40$, $np(1-p) = 30$, מכאן ש- $p = \frac{1}{4}$, $n = 160$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(|X-40| > 10) &= 1 - \mathbf{P}(|X-40| \le 10) \\
&= 1 - \mathbf{P}(30 \le X \le 50) \\
&= 1 - \mathbf{P}\left(\frac{30-40}{\sqrt{30}} \le Z \le \frac{50-40}{\sqrt{30}}\right) \\
&\approx 1 - (\Phi(1.8257) - \Phi(-1.8257)) \\
&\approx 1 - 0.9328 \\
&= 0.0672
\end{aligned}$$

(ניתן גם לעשות תיקון רציפות.)

---

3. המשתנה המקרי X מתפלג מעריכית עם פרמטר λ. המשתנה המקרי Y מוגדר על ידי

$$Y = \begin{cases} 0 & X \le a \\ 1 & a < X < b \\ 2 & X \ge b \end{cases}$$

כאשר a, b הם מספרים ממשים חיוביים. בטא את a ו-b כפונקציות של λ כך שיתקבל כי Y מתפלג אחיד על הערכים $\{0,1,2\}$.

אנחנו רוצים $\mathbf{P}(Y=0) = \mathbf{P}(Y=1) = \mathbf{P}(Y=2) = \frac{1}{3}$. אבל

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(Y=0) = \mathbf{P}(X \le a) = 1 - e^{-\lambda a} \\
&\mathbf{P}(Y=1) = \mathbf{P}(a < X < b) = (1 - e^{-\lambda b}) - (1 - e^{-\lambda a}) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b} \\
&\mathbf{P}(Y=2) = \mathbf{P}(X \ge b) = 1 - (1 - e^{-\lambda b}) = e^{-\lambda b}
\end{aligned}$$

ולכן $e^{-\lambda b} = \frac{1}{3}$, $e^{-\lambda a} = \frac{2}{3}$, כלומר $a = (\log 3 - \log 2)/\lambda$, $b = \log 3/\lambda$.

---

4. במשחק מסוים, השחקן מטיל 2 קוביות הוגנות. אם סכום התוצאות הוא 4 או פחות השחקן מפסיד 72 ש"ח, אם הסכום הוא מ-5 עד 8 השחקן מרוויח 36 ש"ח, ואם הסכום הוא 9 ומעלה השחקן מרוויח 144 ש"ח. מה הם התוחלת והשונות של הרווח של השחקן במשחק זה?

יהי X הרווח במשחק. ההתפלגות של X היא

r	-72	36	144
$\mathbf{P}(X=r)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{18}$

התוחלת היא

$$\mathbf{E}[X] = -72 \cdot \frac{1}{6} + 36 \cdot \frac{5}{9} + 144 \cdot \frac{5}{18} = 48$$

חישוב השונות:

$$\mathbf{E}[X^2] = 72^2 \cdot \frac{1}{6} + 36^2 \cdot \frac{5}{9} + 144^2 \cdot \frac{5}{18} = 7344$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}[X])^2 = 5040$$

---

5. למשתנה מקרי X פונקציית הצפיפות הבאה:

$$f_X(x) = \begin{cases} a & -1 \le x < 0 \\ \frac{1}{3} & 0 \le x < 2 \\ \frac{1}{4} & 2 \le x < 3 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

מצא את התוחלת ואת השונות של X.

חישוב a:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \\ &= \int_{-1}^{0} adx + \int_{0}^{2} \frac{1}{3}dx + \int_{2}^{3} \frac{1}{4}dx \\ &= a + \frac{2}{3} + \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{4}\right) \\ &= a + \frac{11}{12} \end{aligned}$$

ולכן $a = \frac{1}{12}$.

חישוב התוחלת

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \\ &= \int_{-1}^{0} \frac{1}{12}xdx + \int_{0}^{2} \frac{1}{3}xdx + \int_{2}^{3} \frac{1}{4}xdx \\ &= \left[\frac{x^2}{24}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{6}\right]_{0}^{2} + \left[\frac{x^2}{8}\right]_{2}^{3} \\ &= -\frac{1}{24} + \frac{2}{3} + \frac{5}{8} \\ &= 1.25 \end{aligned}$$

חישוב השונות:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx \\
&= \int_{-1}^{0} \frac{1}{12}x^2dx + \int_{0}^{2} \frac{1}{3}x^2dx + \int_{2}^{3} \frac{1}{4}x^2dx \\
&= \left[\frac{x^3}{36}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{9}\right]_{0}^{2} + \left[\frac{x^3}{12}\right]_{2}^{3} \\
&= -\frac{1}{36} + \frac{8}{9} + \frac{19}{12} \\
&= 2.5
\end{aligned}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}[X])^2 = 0.9375$$

---

6. בחנות המכולת השכונתית 20% מהלחמניות הן ממאפיה א' והיתר ממאפיה ב'. התפלגות משקל לחמניה (בגרמים) היא נורמלית עם תוחלת 100 ושונות 25 במאפיה א', ונורמלית עם תוחלת 90 ושונות 100 במאפיה ב'.
   א. אם צרכן בוחר באופן מקרי לחמניה מהדף במכולת, מהי ההסתברות שמשקלה יעלה על 100 גרם?
   ב. אם צרכן בחר לחמניה והתברר שמשקלה מעל 100 גרם, מהי ההסתברות שלחמניה זו ממאפיה א'?

א. יהי X משקל הלחמניה. יהי A המאורע שהלחמניה ממאפיה א' ו-B המאורע שהלחמניה ממאפיה ב'. היות והתוחלת של משקל לחמניה ממאפיה א' היא 100, $\mathbf{P}(X > 100|A) =$ 0.5. ו-

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X > 100|B) &= 1 - \mathbf{P}(X < 100|B) \\
&= 1 - \mathbf{P}\left(Z < \frac{100-90}{10}\right) = 1 - \Phi(1) \approx 1 - 0.8413 = 0.1587
\end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X > 100) &= \mathbf{P}(X > 100|A)\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(X > 100|B)\mathbf{P}(B) \\
&= 0.5 \cdot 0.2 + 0.1587 \cdot 0.8 \approx 0.227
\end{aligned}$$

ב. חוק בייס:

$$\mathbf{P}(A|X > 100) = \frac{\mathbf{P}(X > 100|A)\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(X > 100)} \approx \frac{0.2 \cdot 0.5}{0.227} \approx 0.441$$

7. ההסתברויות של המאורעות A ו-B הן $\mathbf{P}(A) = 0.4$, $\mathbf{P}(B) = 0.7$. בכל סעיף להלן נמק בקצרה את תשובתך:

א. האם ייתכן כי A ו-B זרים זה לזה?

ב. האם ייתכן כי A ו-B בלתי תלויים?

ג. מצא את הערכים האפשריים של $\mathbf{P}(A \cap B)$.

ד. האם ייתכן כי $\mathbf{P}(A|B) = 2\mathbf{P}(A)$?

ה. האם ייתכן כי $\mathbf{P}(A|B) = \frac{1}{2}\mathbf{P}(A)$?

א. לא. אם זרים $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) = 1.1$, בלתי אפשרי.

ב. כן. זה דורש ש-$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = 0.28$, וזה אפשרי.

ג. $0.1 \leq \mathbf{P}(A \cap B) \leq 0.4$. המינימום חיתוך הוא כך ש-$A \cup B = \Omega$, המקסימום כך ש-$A \subset B$.

ד. אם $\mathbf{P}(A|B) = 2\mathbf{P}(A)$, $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A|B)\mathbf{P}(A) = 2\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = 0.56$. בלתי אפשרי.

ה. אם $\mathbf{P}(A|B) = 0.5\mathbf{P}(A)$, $\mathbf{P}(A\cap B) = \mathbf{P}(A|B)\mathbf{P}(A) = 0.5\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = 0.28$. אפשרי.

---

8. בסולם 10 שלבים. אדם העולה בסולם יכול בכל צעד לעלות שלב אחד או שני שלבים בבת-אחת. בכמה דרכים שונות ניתן להגיע לשלב האחרון בסולם?

אם עולה רק עם צעדים של שלב אחד, דרך אחת לעלות.

אם עולה עם צעד אחד של שני שלבים, ו-8 צעדים של שלב אחד, $9 = \binom{9}{1}$ דרכים.

אם עולה עם שני צעדים של שני שלבים, ו-6 צעדים של שלב אחד, $28 = \binom{8}{2}$ דרכים.

אם עולה עם שלושה צעדים של שני שלבים, ו-4 צעדים של שלב אחד, $35 = \binom{7}{3}$ דרכים.

אם עולה עם ארבעה צעדים של שני שלבים, ו-2 צעדים של שלב אחד, $15 = \binom{6}{4}$ דרכים.

אם עולה עם חמשה צעדים של שני שלבים, דרך אחת לעלות

סה"כ: $1 + 9 + 28 + 35 + 15 + 1 = 89$ דרכים.

(יש דרכים אחרות לפתור, כולל שימוש במספרי פיבונצ'י.)

---

9. ההתפלגות המשותפת של זוג המשתנים המקריים (X, Y) נתונה בטבלה הבאה:

		X		
		0	1	2
Y	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
	2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

א. מצא את $\mathrm{Var}(X)$, $\mathrm{Var}(Y)$, $\mathrm{Var}(X-Y)$.
ב. האם X,Y תלויים? נמק.
ג. באופן כללי, אם X ו-Y משתנים מקריים בלתי תלויים, מה ניתן להגיד על $\mathrm{Var}(X-Y)$?

א. התפלגות השולית של X:

r	0	1	2
$\mathbf{P}(X=r)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

תוחלת 1 (סימטריה).
$\mathbf{E}[X^2]=0^2\cdot\frac{1}{4}+1^2\cdot\frac{1}{2}+2^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$.
$\mathrm{Var}(X)=\mathbf{E}[X^2]-(\mathbf{E}[X])^2=\frac{1}{2}$.
כמו כן $\mathrm{Var}(Y)=\frac{1}{2}$.
התפלגות של $X-Y$:

r	-2	-1	0	1	2
$\mathbf{P}(X-Y=r)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

תוחלת 0 (סימטריה).
$\mathbf{E}[(X-Y)^2]=0^2\cdot\frac{3}{8}+1^2\cdot\frac{1}{2}+2^2\cdot\frac{1}{8}=1$.
$\mathrm{Var}(X-Y)=1$.
ב. בקלות ניתן לבדוק שלכל r,s

$$\mathbf{P}(X=r,Y=s)=\mathbf{P}(X=r)\mathbf{P}(Y=s)$$

ולכן X,Y בלתי תלויים.
ג. אם X,Y בלתי תלויים $\mathrm{Var}(X-Y)=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(-Y)=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)$. (כמו בסעיף א.)

---

10. משתנה מקרי רציף X מקבל ערכים על הקטע $(-1,1)$ ופונקציית הצפיפות שלו היא

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) & -1<x<1\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

א. אם $0\le a<1$, מה היא ההסתברות $\mathbf{P}(|X|<a)$?
ב. מצא את פונקציית הצפיפות של המשתנה המקרי $Y=X^2$.

א.

$$\mathbf{P}(|X|<a)=\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{a}\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx=\left[\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]_{-a}^{a}=\sin\left(\frac{\pi a}{2}\right)$$

ב. Y מקבל ערכים בין 0 ל-1. אם $0 < y < 1$

$$F_Y(y) = \mathbf{P}(Y < y) = \mathbf{P}(X^2 < y) = \mathbf{P}(|X| < \sqrt{y}) = \sin\left(\frac{\pi\sqrt{y}}{2}\right)$$

(השתמשנו בתוצאת סעיף א) ולכן

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{\pi}{4\sqrt{y}}\cos\left(\frac{\pi\sqrt{y}}{2}\right) \ , \qquad 0 < y < 1$$