בס"ד

הסתברות כללית 88-262,
מועד ב', סמסטר א', תשנ"ט

ד"ר ג'רמי שיף

זמן המבחן: שעתיים.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.
עליך לענות על כל השאלות. ניקוד כל השאלות שווה.

1. יהי X משתנה מקרי בעל צפיפות

$$f(x) = c^2 - x^2 \qquad |x| < c$$

כאשר c הוא פרמטר חיובי. מצא את c, את התוחלת ואת השונות של X, ואת ההסתברות $\mathbf{P}(|X| < \sigma)$, כאשר σ הוא סטיית התקן של X.

2. מחלקים שלוש מתנות באופן אקראי בין שלושה אנשים. אם הראשון מקבל X מתנות, השני Y והשלישי Z, מצא את ההתפלגות המשותפת של הזוג (X, Y). חשב את ההתפלגות השולית של X ובדוק ש-$X \sim B(3, \frac{1}{3})$. מה היא ההתפלגות של $X + Y$?

3. במעבדת מחשבים יש 45 תחנות עבודה ישנות אשר תקינות 90% מהזמן. אם 40 סטודנטים באים ללמוד במעבדה, מה היא (בערך) ההסתברות שיהיו מספיק תחנות תקינות לכולם? מה התשובה כאשר יש במעבדה 50 תחנות?
אם סטודנט מקבל תחנה תקינה בתחילת השיעור, יש סיכוי 5% שהתחנה לא תפעל עד סוף השיעור. אם במשך 10 שיעורים סטודנט מסויים מקבל תחנה תקינה בתחילת כל שיעור, מה היא ההסתברות שאף פעם לא תהיה לו בעיה באמצע שיעור?

4. מחלקים חמש מתנות באופן אקראי בין שלושה אנשים. אם הראשון מקבל X מתנות, השני Y ושלישי Z, מצא את התפלגותם של
   א. הכי קטן של X, Y, Z.
   ב. הכי גדול של X, Y, Z.
   (לדוגמה, אם המתנות מחולקות 2,2,1 אזי הכי קטן של X, Y, Z הוא 1 והכי גדול הוא 2.)

5. מתוך האוכלוסייה 30% מעשנים, 20% הם בעלי עודף משקל ו-20% סובלים מבעיות לב. מתוך אלה הסובלים מבעיות לב 40% מעשנים ו-40% בעלי עודף משקל. מצא את ההסתברויות שמעשן יסבול מבעיות לב ואת ההסתברות שמישהו בעל עודף משקל יסבול מבעיות לב.
מתוך המעשנים באוכלוסייה הכללית 20% בעלי עודף משקל, אבל מתוך המעשנים הסובלים מבעיות לב 50% בעלי עודף משקל. מצא את ההסתברות שמישהו שגם מעשן וגם בעל עודף משקל יסבול מבעיות לב. מצא גם את ההסתברות שמעשן בעל משקל רגיל יסבול מבעיות לב.

6. א. אם $D \sim U(a, b)$ $(b > a > 0)$, מצא את התוחלת ואת השונות של $1/D^2$.
   ב. בתהליך לייצור חוטים, לקוטר D של החוטים יש התפלגות $U(a, b)$ עם תוחלת 1. דורשים שסטיית התקן של $1/D^2$ תהיה קטנה מ-0.1 ($1/D^2$ קובע את המוליכות של החוטים). האם ניתן לקחת $b - a = 0.17$?