

זמן המבחן: שעתיים.

אסור להשתמש בחומר עזר. מותר להשתמש במחשב כיס.  
יש לענות על 8 מתוך 10 השאלות. ניקוד כל השאלות שווה.  
יש לנמק היטב כל תשובה!

1. א. אם משתנה מקרי  $X$  מתפלג פאוסון, ו- $P(X = 1) = 2P(X = 0)$ , מה היא התוחלת של

$X$  ?

ב. הוכח שאם  $X$  מתפלג פאוסון עם פרמטר  $\lambda$  ו- $Y$  מתפלג פאוסון עם פרמטר  $\lambda'$ , ו- $X, Y$  בלתי-תלויים, אזי  $X + Y$  מתפלג פאוסון עם פרמטר  $\lambda + \lambda'$ .

2. יהי  $X$  אורך חיים של צלחת. ידוע ש- $X$  מתפלג מעריכית עם תוחלת 100 ימים. מצא את

$$P(X \leq 100) \text{ ואת } P(X \geq 200 | X \geq 100).$$

3. למשתנה מקרי רציף  $X$  יש פונקציית צפיפות

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x & 2 < x < 3 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

מצא את התוחלת ואת השונות של  $X$ .

4.  $X$  הוא משתנה מקרי עם פונקציית צפיפות

$$f_X(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)}.$$

מה היא פונקציית הצפיפות של  $Y = 2X - 1$  ?

5. מטילים קובייה הוגנת פעמיים, ומקבלים שתי תוצאות  $x$  ו- $y$ .  $A$  הוא המאורע ש- $x > y$ , ו- $B$

הוא המאורע ש- $x + y$  מספר זוגי. האם  $A$  ו- $B$  בלתי-תלויים ?

6. מפעל לאריזת תפוזים מעוניין לחלק את הפרי לשלושה סוגים, קטן, בינוני וגדול, באופן ש-20%

מהתוצרת מוגדר כקטן, 70% מוגדר כבינוני, ו-10% מוגדר כגדול. לשם כך יש צורך בקביעת

שני ערכים  $a, b$ , כך שאם המשקל  $X$  של תפוז נמצא ביניהם, כלומר  $a < X < b$ , הפרי מוגדר כבינוני. ידוע ש- $X$  מתפלג נורמלית עם תוחלת 150 גרם ושונות 900 גרם בריבוע. מה הם הערכים  $a, b$ ?

7. במפעל מסויים מייצרים 100 פריטים ליום. ההסתברות לכל פריט להיות פגום הוא  $\frac{1}{50}$ . מצא את ההסתברות שביום מסויים יהיו יותר מ-2 פריטים פגומים

- א. בהנחה שמספר הפריטים הפגומים ליום מתפלג בינומית עם  $n = 100, p = \frac{1}{50}$ ,  
ב. בהנחה שמספר הפריטים הפגומים ליום מתפלג פאוסון עם פרמטר  $\lambda = 2$ .

8. הוכח שאם  $X, Y$  משתנים מקריים בלתי-תלויים, אזי

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) .$$

9. נכון או לא נכון:

- א. אם  $X, Y$  שני משתנים מקריים עם טווח סופי, אזי  $E[XY] = E[X]E[Y]$ .  
ב. לכל שני מאורעות  $A, B, P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A)P(B|A)$ .  
ג. הסכום של שני משתנים מקריים בלתי-תלויים בעלי התפלגות אחידה הוא משתנה מקרי בעל התפלגות אחידה.  
נמק כל תשובה!

10. א. אם  $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$ , ו-  $P(A^c \cap B^c) = \frac{1}{3}$ , מצא את  $P(A \cup B^c)$ .  
ב. אם  $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$ , מה הם הערכים האפשריים של  $P(A^c \cap B^c)$ ?