בס"ד

הסתברות כללית, 88-262
מועד א', סמסטר א', תשס"א

פרופ. מרצבך
פרופ. פורסטנבורג
דר. שיף

זמן המבחן: שעתיים.
אסור להשתמש בחומר עזר. מותר להשתמש במחשב כיס.
יש לענות על 8 מתוך 10 השאלות. ניקוד כל השאלות שווה.
יש לנמק היטב כל תשובה!

1. א. אם X, Y משתנים מקריים בלתי-תלויים עם תוחלת 0 ושונות 1, חשב את $\rho(X, X+Y)$.
ב. אם X, Y משתנים מקריים הקשורים על ידי $Y = 3X + 7$, חשב את $\rho(X, Y)$.

א. נתון $\mathrm{Var}(X) = 1$, ו-X, Y בלתי-תלויים, לכן $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y) = 2$. גם $\mathrm{cov}(X, X+Y) = \mathbf{E}[X(X+Y)]-\mathbf{E}[X]\mathbf{E}[X+Y] = 1$ (נתון לנו ש-$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[Y] = 0$, X, Y בלתי תלויים ולכן גם $\mathbf{E}[XY] = 0$, ו-$\mathbf{E}[X^2] = \mathrm{Var}(X) + (\mathbf{E}[X])^2 = 1$). ולכן

$$\rho(X, X+Y) = \frac{\mathrm{cov}(X, X+Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(X+Y)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ .$$

ב. באופן כללי אם $Y = aX + b$ כאשר $a > 0$, אזי $\rho(X, Y) = 1$. הוכחה:

$$\begin{aligned}
\mathrm{cov}(X, aX+b) &= \mathbf{E}[X(aX+b)] - \mathbf{E}[X]\mathbf{E}[aX+b] \\
&= (a\mathbf{E}[X^2] + b\mathbf{E}[X]) - \big(a(\mathbf{E}[X])^2 + b\mathbf{E}[X]\big) \\
&= a\mathrm{Var}(X)
\end{aligned}$$

לכן

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathrm{cov}(X, aX+b)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(aX+b)}} = \frac{a\mathrm{Var}(X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X) \cdot a^2\mathrm{Var}(X)}} = 1$$

2. חשב את התוחלת ואת השונות של ההתפלגות הגאומטרית.

בהתפלגות הגאומטרית משתנה המקרי X מקבל את הערכים $r = 1, 2, \ldots$ בהסתברויות $\mathbf{P}(X = r) = (1-p)^{r-1}p$. נסמן $q = 1 - p$. ובכן

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{r=1}^{\infty} r\mathbf{P}(X = r) = \sum_{r=1}^{\infty} prq^{r-1} = p\frac{d}{dq}\left(\sum_{r=0}^{\infty} q^r\right) = p\frac{d}{dq}\left(\frac{1}{1-q}\right) = p\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}$$

כדי לחשב את השונות, נשים לב ש-

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X(X+1)] &= \sum_{r=1}^{\infty} r(r+1)\mathbf{P}(X = r) = \sum_{r=1}^{\infty} pr(r+1)q^{r-1} = p\frac{d^2}{dq^2}\left(\sum_{r=-1}^{\infty} q^{r+1}\right) \\ &= p\frac{d^2}{dq^2}\left(\frac{1}{1-q}\right) = p\frac{2}{(1-q)^3} = \frac{2}{p^2}\end{aligned}$$

ולכן

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}[X])^2 = \mathbf{E}[X(X+1)] - \mathbf{E}[X] - (\mathbf{E}[X])^2 = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

3. בקופסא 20 פתקים ממוספרים מ-1 עד 20. מוציאים 4 פתקים באופן מקרי (בלי החזרה). מה ההסתברות שהמספר הגדול ביותר שהוצא לא יהיה גדול מ-15 ? מה ההסתברות שהמספר הגדול ביותר שהוצא יהיה בדיוק 15 ?

מספר הדרכים לבחור 4 חפצים מתוך 20 הוא $\binom{20}{4}$, מספר הדרכים לבחור 4 חפצים מתוך 15 הוא $\binom{15}{4}$, ולכן ההסתברות שהמספר הגדול שהוצא לא יהיה גדול מ-15 הוא

$$\frac{\binom{15}{4}}{\binom{20}{4}} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17} \approx 0.282$$

מספר הדרכים להוציא את הפתקים כך שהגדול ביניהם ממוספר 15 הוא מספר הדרכים לבחור 3 חפצים (שאר הפתקים) מתוך 14 (אלה עם מספרים מתחת ל-15). ולכן ההסתברות לכך היא

$$\frac{\binom{14}{3}}{\binom{20}{4}} = \frac{(14 \cdot 13 \cdot 12)/3!}{(20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17)/4!} \approx 0.075$$

4. למטבע מסוים ההסתברות לקבל "ראש" הוא $\frac{1}{3}$. מטילים את המטבע 900 פעמים. חשב בקירוב את $\mathbf{P}(290 \leq X \leq 310)$, כאשר X הוא מספר הפעמים שיצא "ראש" ב-900 ההטלות.

מספר הראשים מתפלג $B(900, \frac{1}{3})$. להתפלגות זו יש תוחלת $900 \cdot \frac{1}{3} = 200$ וסטיית תקן $900 \cdot \frac{1}{3} \cdot (1 - \frac{1}{3}) = 10\sqrt{2}$. על ידי משפט De Moivre-Laplace (מקרה מיוחד של משפט הגבול המרכזי) ניתן לעשות קירוב על ידי התפלגות הנורמלית עם $\mu = 300, \sigma = 10\sqrt{2}$. בהתפלגות זו יש לנו

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(290 \leq X \leq 310) &= \mathbf{P}\left(\frac{290-300}{10\sqrt{2}} \leq \frac{X-300}{10\sqrt{2}} \leq \frac{310-300}{10\sqrt{2}}\right) \\
&= \mathbf{P}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq Z \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) \\
&\approx 2\Phi(0.71) - 1 \\
&\approx 2 \times 0.76 - 1 \\
&= 0.52
\end{aligned}
$$

לאלה שעשו תיקון רציפות (כדאי), בהתפלגות הנורמלית מחשבים $\mathbf{P}(289\frac{1}{2} < X < 310\frac{1}{2})$. איפה שהיה $\frac{1}{\sqrt{2}}$ למעלה עכשיו מופיע $0.74 \approx \frac{1.05}{\sqrt{2}}$. התשובה הסיפות משתנה ל-$0.54$.

5. משתנה מקרי בדיד מתפלג כדלהלן:

r	1	2	3	4
$\mathbf{P}(X=r)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$

מצא את התוחלת ואת השונות של X.

$$\mathbf{E}[X] = \sum_r r\mathbf{P}(X=r) = 1\cdot\frac{1}{8} + 2\cdot\frac{1}{4} + 3\cdot\frac{1}{2} + 4\cdot\frac{1}{8} = \frac{21}{8}$$

$$\mathbf{E}[X^2] = \sum_r r^2\mathbf{P}(X=r) = 1^2\cdot\frac{1}{8} + 2^2\cdot\frac{1}{4} + 3^2\cdot\frac{1}{2} + 4^2\cdot\frac{1}{8} = \frac{61}{8}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}[X])^2 = \frac{61}{8} - \frac{441}{64} = \frac{47}{64} \approx 0.734$$

6. נכון או לא נכון:

א. אם A, B בלתי-תלויים אזי A^c, B^c בלתי-תלויים.

ב. אם נתונים שלושה מאורעות A, B, C כך ש- $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$,
$\mathbf{P}(B \cap C) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C)$, ו- $\mathbf{P}(C \cap A) = \mathbf{P}(C)\mathbf{P}(A)$,
אזי $\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C)$.

ג. אם A, B שני מאורעות עם $\mathbf{P}(A), \mathbf{P}(B) > 0$, ו- $\mathbf{P}(A|B) = P(A)$,
אזי $\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B)$.

נמק כל תשובה!

א. נכון. היות ומאורע קובע חד-משמעית את המשלים שלו, וכן הפוך, יש תלות בין שני מאורעות אם ורק אם יש תלות בין המשלימים שלהם.
לאלה שמעדיפים נוסחאות, לכל שתי מאורעות A, B

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A^c \cap B^c) &= 1 - \mathbf{P}(A \cup B)\\ &= 1 - \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(A \cap B)\\ &= (1 - \mathbf{P}(A))(1 - \mathbf{P}(B)) + (\mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(\mathbf{B}))\end{aligned}$$

ולכן

$$\mathbf{P}(A^c \cap B^c) - \mathbf{P}(A^c)\mathbf{P}(B^c) = \mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$$

צד ימין אפס (A, B ב"ת) אם ורק אם צד שמאול אפס (A^c, B^c ב"ת).

ב. לא נכון. לדוגמא: נקח $\Omega = \{a, b, c, d\}$, $\mathbf{P}(\{a\}) = \mathbf{P}(\{b\}) = \mathbf{P}(\{c\}) = \mathbf{P}(\{d\}) = \frac{1}{4}$. נקח $A = \{a, b\}$, $B = \{a, c\}$, $C = \{a, d\}$. יש לנו $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(C) = \frac{1}{2}$, $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(B \cap C) = \mathbf{P}(C \cap A) = \frac{1}{4}$, לכן ההנחות קיימות, אבל

$$\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C)$$

.

ג. נכון. לשני מאורעות A, B עם הסתברויות לא אפס, שלושה התנאים $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A)$, $\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B)$, $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$ הם שקולים, ומביעים את בלתי-התלות של שני המאורעות.

7. השווה בין הגרפים של שתי פונקציות הצפיפות

$$f_1(x) = 1 \qquad 0 < x < 1$$
$$f_2(x) = 6x(1-x) \qquad 0 < x < 1$$

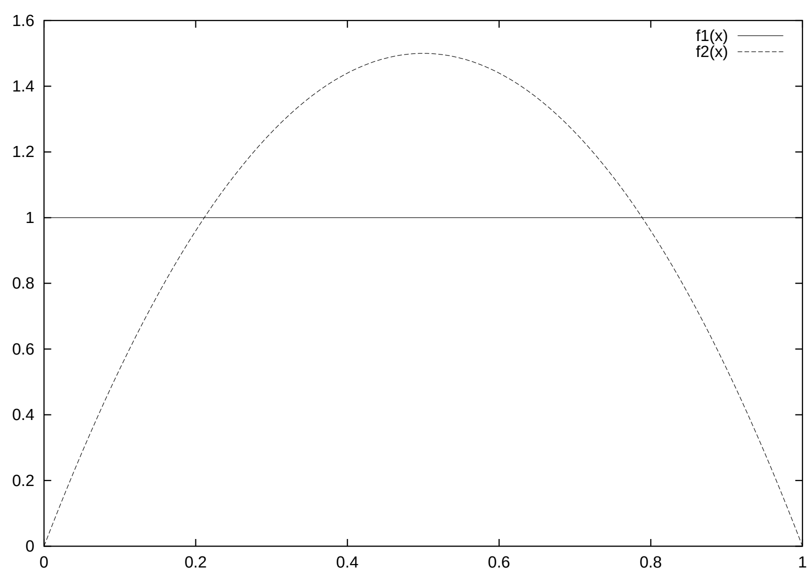
לפי דעתך, לאיזה משתי ההתפלגויות הקשורות תהיה שונות נמוכה יותר? חשב את השונויות בשתי ההתפלגויות.

הגרפים של שתי הפונקציות מופיעות למטה. היות ו-$f_1(x)$ יותר רחב, ו-$f_2(x)$ יותר מרוכז מסביב ל-$x = \frac{1}{2}$, כנראה השונות תהיה נמוכה יותר בהתפלגות השנייה. ההתפלגות הראשונה היא התפלגות אחידה על הקטע $[a,b] = [0,1]$. מדף הנוסחאות השונות היא $\frac{1}{12}$. להתפלגות השנייה

$$\mathbf{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\ dx = \int_0^1 x \cdot 6x(1-x)\ dx = 6\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 6\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\ dx = \int_0^1 x^2 \cdot 6x(1-x)\ dx = 6\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = 6\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3}{10}$$

ולכן $\frac{1}{20} = \frac{1}{4} - \frac{3}{10} = \text{Var}(X) = \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}[X])^2$. רואים אכן שהשונות בהתפלגות השנייה נמוכה יותר.



8. בארץ מסויימת יש שתי מפלגות פוליטיות A, B ושני עתונים C, D. כל תושב תומך בבדיוק מפלגה אחת, וקורא בדיוק עיתון אחד. מתוך סקר עולה שמכלל האכלוסיה 56% קוראים עיתון C, מתומכי מפלגה A 80% קוראים עיתון C, ומתומכי מפלגה B 30% קוראים עיתון C. לפי מספרים אלה, לאיזה מפלגה יש יותר תומכים?

לפי חוק ההסתברות הכוללת, היות ו-$B = A^c$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(C) &= \mathbf{P}(C|A)\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(C|B)\mathbf{P}(B) \\ \Leftrightarrow \qquad 0.56 &= 0.8\mathbf{P}(A) + 0.3(1 - \mathbf{P}(A)) \\ &= 0.3 + 0.5\mathbf{P}(A) \end{aligned}$$

ולכן $\mathbf{P}(A) = 0.52$, כלומר, יש יותר תומכים למפלגה A.

9. הסבר, מבחינה קומבינטורית (במילים, בלי נוסחאות) למה

$$\binom{n+1}{m}=\binom{n}{m}+\binom{n}{m-1}\ .$$

השתמש בעובדה זו להוכיח שאם $X\sim B(n,p)$ ו-$Y\sim B(1,p)$ ו-X,Y בלתי-תלויים, אזי $X+Y\sim B(n+1,p)$.

$\binom{n+1}{m}$ הוא מספר הדרכים לבחור m אובייקטים מתוך $n+1$. אם אנחנו קודם כל מוציאים אחד מ-$(n+1)$ האובייקטים, מסתבר שיש שני דרכים לבחור את ה-m: או שלא נבחר את האובייקט שהוצא (ואם כן יש לבחור כל m האובייקטים מתוך n האחרים, זה ניתן לעשות ב-$\binom{n}{m}$ דרכים), או שכן נבחר את האובייקט שהוצא (ואם כן יש לבחור רק $m-1$ אובייקטים מתוך ה-n, זה ניתן לעשות ב-$\binom{n}{m-1}$ דרכים). ולכן

$$\binom{n+1}{m}=\binom{n}{m}+\binom{n}{m-1}\ .$$

אם X מתפלג $B(n,p)$, X מקבל ערכים $0,1,\ldots,r$ בהסתברויות

$$\mathbf{P}(X=r)=\binom{n}{r}p^r(1-p)^{n-r}\ .$$

אם Y מתפלג $B(1,p)$, Y מקבל את הערך 0 בהסתברות $(1-p)$, והערך 1 בהסתברות p. נתון ש-X,Y בלתי-תלויים. ולכן

$$\mathbf{P}(X+Y=0)=\mathbf{P}(X=Y=0)=\mathbf{P}(X=0)\mathbf{P}(Y=0)=(1-p)^n\cdot(1-p)=(1-p)^{n+1}$$

$$\mathbf{P}(X+Y=n+1)=\mathbf{P}(X=n,Y=1)=\mathbf{P}(X=n)\mathbf{P}(Y=1)=p^n\cdot p=p^{n+1}$$

ולכל r בין 1 ל-n:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X+Y=r)&=\mathbf{P}(X=r)\mathbf{P}(Y=0)+\mathbf{P}(X=r-1)\mathbf{P}(Y=1)\\&=\binom{n}{r}p^r(1-p)^{n-r}\cdot(1-p)+\binom{n}{r-1}p^{r-1}(1-p)^{n-r+1}\cdot p\\&=\binom{n+1}{r}p^r(1-p)^{n+1-r}\end{aligned}$$

בשורה האחרונה השתמשנו בזהות של מקדמים בינומיים מלמעלה. אנחנו רואים שאכן $X+Y$ מתפלג $B(n+1,p)$.

10. הוכח שלכל 3 מאורעות A, B, C

$$\mathbf{P}(A\cup B\cup C) = \mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)+\mathbf{P}(C)-\mathbf{P}(A\cap B)-\mathbf{P}(A\cap C)-\mathbf{P}(B\cap C)+\mathbf{P}(A\cap B\cap C)\,.$$

נשתמש במשפט הדומה לשני מאורעות A, B, $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A \cup B \cup C) &= \mathbf{P}(A \cup (B \cup C)) \\
&= \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B \cup C) - \mathbf{P}(A \cap (B \cup C)) \\
&= \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(B \cap C) - \mathbf{P}((A \cap B) \cup (A \cap C)) \\
&= \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(B \cap C) \\
&\quad - (\mathbf{P}(A \cap B) + \mathbf{P}(A \cap C) - \mathbf{P}((A \cap B) \cap (A \cap C))) \\
&= \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A \cap C) - \mathbf{P}(B \cap C) + \mathbf{P}(A \cap B \cap C)\ .
\end{aligned}$$

השתמשנו כאן בשורה הראשונה באסוציאטיביות של $\cup$, בשורה שניה במשפט ל-2 מאורעות, בשורה השליהית שוב במשפט ל-2 מאורעות וגם בחוק הפילוג, בשורה הרביעית שוב במשפט לשני מאורעות, ובשורה האחרונה באסוציאטיביות של $\cap$, ובזה ש-$A \cap A = A$.