בס"ד

הסתברות כללית, 88-262
מועד א', סמסטר א', תשס"א

פרופ. מרצבך
פרופ. פורסטנבורג
דר. שיף

זמן המבחן: שעתיים.
אסור להשתמש בחומר עזר. מותר להשתמש במחשב כיס.
יש לענות על 8 מתוך 10 השאלות. ניקוד כל השאלות שווה.
יש לנמק היטב כל תשובה!

1. א. אם X, Y משתנים מקריים בלתי-תלויים עם תוחלת 0 ושונות 1, חשב את $\rho(X, X+Y)$.
   ב. אם X, Y משתנים מקריים הקשורים על ידי $Y = 3X + 7$, חשב את $\rho(X, Y)$.

2. חשב את התוחלת ואת השונות של ההתפלגות הגאומטרית.

3. בקופסא 20 פתקים ממוספרים מ-1 עד 20. מוציאים 4 פתקים באופן מקרי (בלי החזרה). מה ההסתברות שהמספר הגדול ביותר שהוצא לא יהיה גדול מ-15 ? מה ההסתברות שהמספר הגדול ביותר שהוצא יהיה בדיוק 15 ?

4. למטבע מסוים ההסתברות לקבל "ראש" הוא $\frac{1}{3}$. מטילים את המטבע 900 פעמים. חשב בקירוב את $\mathbf{P}(290 \leq X \leq 310)$, כאשר X הוא מספר הפעמים שיצא "ראש" ב-900 ההטלות.

5. משתנה מקרי בדיד מתפלג כדלהלן:

r	1	2	3	4
$\mathbf{P}(X = r)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$

   מצא את התוחלת ואת השונות של X.

6. נכון או לא נכון:
   א. אם A, B בלתי-תלויים אזי A^c, B^c בלתי-תלויים.
   ב. אם נתונים שלושה מאורעות A, B, C כך ש- $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$,
   $\mathbf{P}(B \cap C) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C)$, ו- $\mathbf{P}(C \cap A) = \mathbf{P}(C)\mathbf{P}(A)$,
   אזי $\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C)$.
   ג. אם A, B שני מאורעות עם $\mathbf{P}(A), \mathbf{P}(B) > 0$, ו- $\mathbf{P}(A|B) = P(A)$,
   אזי $\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B)$.
   נמק כל תשובה!

7. השווה בין הגרפים של שתי פונקציות הצפיפות

$$\begin{array}{ll} f_1(x) = 1 & 0 < x < 1 \\ f_2(x) = 6x(1-x) & 0 < x < 1 \end{array}$$

לפי דעתך, לאיזה משתי ההתפלגויות הקשורות תהיה שונות נמוכה יותר? חשב את השונויות בשתי ההתפלגויות.

8. בארץ מסויימת יש שתי מפלגות פוליטיות A, B ושני עתונים C, D. כל תושב תומך בבדיוק מפלגה אחת, וקורא בדיוק עיתון אחד. מתוך סקר עולה שמכלל האכלוסיה 56% קוראים עיתון C, מתומכי מפלגה A 80% קוראים עיתון C, ומתומכי מפלגה B 30% קוראים עיתון C. לפי מספרים אלה, לאיזה מפלגה יש יותר תומכים?

9. הסבר, מבחינה קומבינטורית (במילים, בלי נוסחאות) למה

$$\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m} + \binom{n}{m-1} \ .$$

השתמש בעובדה זו להוכיח שאם $X \sim B(n,p)$ ו-$Y \sim B(1,p)$ בלתי-תלויים, אזי $X+Y \sim B(n+1,p)$.

10. הוכח שלכל 3 מאורעות A, B, C

$$\mathbf{P}(A \cup B \cup C) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A \cap C) - \mathbf{P}(B \cap C) + \mathbf{P}(A \cap B \cap C) \ .$$