בס"ד

הסתברות כללית, 88-262 | **ד"ר ג'רמי שיף**

תרגילים להרצאה 6

1. יהי X משתנה מקרי בעל פונקציית צפיפות

$$f(x) = c(1-x^2)\ , \qquad 0 < x < 1\ .$$

מצא את c, את פונקציית ההצטברות, את התוחלת של X, ואת ההסתברות $\mathbf{P}(X \le \frac{1}{2})$. האם החציון של X גדול או קטן מ-$\frac{1}{2}$? (למתעניינים בלבד: הוכח שהחציון של X הוא $2\cos(\frac{4\pi}{9})$.)

2. יהי X משתנה מקרי בעל פונקציית צפיפות

$$f(x) = \frac{c}{\sqrt{a^2-x^2}}\ , \qquad |x| < a\ ,$$

כאשר a הוא פרמטר חיובי.

א. מצא את הקבוע c.

ב. מצא את פונקציית ההצטברות של X

ג. חשב את ההסתברויות $\mathbf{P}(0 \le X \le a)$ ו-$\mathbf{P}(|X| \le \frac{a}{2})$.

3. יהי X משתנה מקרי בעל פונקציית הצטברות

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le c \\ 1-\left(\frac{c}{x}\right)^a & x > c \end{cases}$$

כאשר a ו-c הם פרמטרים חיוביים. מצא את פונקציית הצפיפות של X. מצא גם את התוחלת של X בהנחה ש-$a > 1$. מה אם $a < 1$?

4. יהי X משתנה מקרי בעל פונקציית הצטברות

$$F(x) = b + c\ \arctan(x/a) \qquad x \in \mathbf{R}$$

כאשר a הוא פרמטר חיובי.

א. מצא את הקבועים b ו-c.

ב. מצא את פונקציית הצפיפות של X.

ג. מצא את ההסתברות $\mathbf{P}(-a \le X \le a)$.

(ההתפלגות הזאת נקראת "התפלגות קושי".)

5. למשתנה המקרי X המוגדרת בשאלה 1. למעלה,

א. מה הוא התחום של ערכים של המשתנה המקרי $Y = 1/(1+X)$?

ב. מצא את הצפיפות של Y.

ג. על ידי התשובות לסעיפים הקודמים מצא את התוחלת של Y.

חזור על שאלה זו למקרה ש-Y מוגדר על ידי $Y = (X-\frac{1}{2})^2$.