בס"ד

אנליזה שימושית, 88-234-01 — ד"ר.גרמי שיף

מבחן לדוגמה

זמן המבחן: שעתיים.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.
ניקוד כל השאלות שווה.

1. א. אם $y_0(x)$ הוא פתרון פרטי של המשוואה

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$$

אזי הוכח שעל ידי ההצבה $y = y_0 - 1/w$ אפשר להביא את המשוואה הזאת לצורה ליניארית. על ידי השיטה הזאת, פתור את המשוואה

$$y' = -xy^2 + (2x^3 - 3)y + (2x + 3x^2 - x^5)$$

שיש לו פתרון פרטי $y_0(x) = x^2$.

ב. פתור את המשוואות

$$y'' + y' - 2y = 0$$
$$y'' + y' - 2y = 2(1 + x - x^2)$$

2. א. $y = x$ הוא פתרון אחד של המשוואה

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

על ידי ההצבה $y = xz$, מצא משוואה ליניארית מסדר ראשון עבור z' , ועל ידי פתרון משוואת עזר זה, מצא את הפתרון הכללי של המשוואה המקורית.

ב. כתוב נוסחא עבור פתרון הבעייה:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = (1 - x^2)b(x)$$
$$y(0) = y'(0) = 0$$

3. א. מצא את טור הפוריה של הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} -\pi & -\pi < x < 0 \\ x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

ב. צייר את הגרף של הסכום של הטור שמצאת בסעיף א. בקטע $-3\pi < x < 3\pi$.

ג. הוכח ש-

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

4. מצא את טרנספורם הפוריה של הפונקציות הבאות:

א.

$$f(x) = \begin{cases} h(e^{-|x|} - e^{-a}) & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

(h, a קבועים חיוביים).

ב.

$$f(x) = \begin{cases} x(e^{-|x|} - e^{-1}) & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

בהצלחה!