בס"ד
כלים לאנליזה נומרית 83-214, פרופ' ג'. שיף
מועד א', סמסטר א', תשס"ד

זמן המבחן: שעתיים וחצי.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.
בחלק א' (50% של הציון) יש לענות על כל השאלות (ניקוד כל השאלות בחלק שווה)
בחלק ב' (50% של הציון) יש לענות על 2 מהשאלות (ניקוד כל השאתות בחלק שווה)

חלק א'

1. העזר ב-3 סיבובים של שיטת ניוטון למצוא קירוב טוב לשורש של $e^x = 3x$ שהוא קרוב ל-0.6. מה הוא, לדעתך, הדיוק של הקירוב שמצאת?

2. כאשר כותבים ב- Matlab את הפקודות

```
A=[1 3 4 ; -1 2 3 ; 1 1 0] ;
[z zz]=eig(A)
```

מקבלים את התגובות

$$\mathtt{z} = \begin{pmatrix} 0.8629 & -0.2811 & 0.9239 \\ -0.3574 & -0.6786 & 0.1421 \\ 0.3574 & 0.6786 & 0.3553 \end{pmatrix}, \qquad \mathtt{zz} = \begin{pmatrix} 1.4142 & 0 & 0 \\ 0 & -1.4142 & 0 \\ 0 & 0 & 3.0000 \end{pmatrix}$$

העזר בתוצאות האלה למצוא את הערכים העצמיים ואת הווקטורים העצמיים של A באופן מדויק.

3. מצא פולינום מדרגה 3 או פחות שעובר דרך הנקודות הבאות:

x_i	0	1	2	4
y_i	0	3	3	5

יש להשתמש בשיטת הפרשים מחולקים.

4. מצא, על ידי כלל סמפסון עם $h = \frac{\pi}{4}$, קירוב לאינטגרל $\int_0^\pi e^{-x} \sin x dx$.

5. הפונקציה $y(t)$ פותרת את הבעיה

$$y' = \frac{1}{1+ty}, \qquad y(0) = 1$$

העזר בשיטת אויילר עם $h = \frac{1}{4}$ למצוא קירוב ל-$y(1)$.

6. חשב את הטעות הייחסית במטריצה

$$\begin{pmatrix} 1.4 & 2.7 & -1.5 \\ 1.9 & 0.3 & 2.1 \\ -1.1 & 1.7 & 0.5 \end{pmatrix}$$

כקירוב למטריצה

$$\begin{pmatrix} 1.8 & 2.4 & -1.9 \\ 1.6 & 0.3 & 2.2 \\ -1.2 & 2.0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

יש לעבוד גם בנורמה 1 גם בנורמה ∞.

חלק ב'

1. הסבר בקצרה איך ניתן למצוא פירוק QR של מטריצה.

למטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 13 & -21 \\ 7 & -1 & 7 \\ 14 & 57 & 0 \\ 7 & -22 & -7 \end{pmatrix}$$

יש פירוק QR

$$A = \begin{pmatrix} -0.3780 & 0.4989 & 0.7327 & -0.2673 \\ -0.3780 & -0.0384 & -0.4613 & -0.8018 \\ -0.7559 & 0.1919 & -0.3256 & 0.5345 \\ -0.3780 & -0.8443 & 0.3799 & 0.0000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -18.5203 & 0 & 7.9373 \\ 0 & 26.0576 & -4.8354 \\ 0 & 0 & -21.2748 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

העזר בפירוק זה למצוא את הפתרון (במובן של ריבועים מזעריים) של המערכת

$$Ax \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

מתברר שה-0 ברכיב $3,3$ של A היה שגוי, והיה צריך להיות מספר אחר, שנסמן μ. איך זה משפיע על פתרון המערכת ?

2. כאשר y הוא קטן, ידוע ש-

$$\sin y - y \approx -\frac{1}{6} y^3$$

כאשר אני כותב ב- Matlab את הפקודות הבאות:

```
x=[-1:-1:-8]';
y=10.^x;
(6)*(y-sin(y))./y.^3
```

אני מקבל את המספרים הבאים:

$$\begin{array}{c} 0.99950011903110 \\ 0.99999500001446 \\ 0.99999995003402 \\ 0.99999996889914 \\ 1.00000370939664 \\ 0.99992239423370 \\ 1.03232140446618 \\ 0 \end{array}$$

הסבר בקצרה את הפקודות ב- Matlab. הסבר בפרוטרוט למה המספרים שהתקבלו הם שונים מ-1. יש לתת הסבר גם איכותי וגם כמותי: כלומר, לא רק להסביר את המקורות השונות של "שגיאה", אלה גם לחשב בכמה כל מקור של שגיאה יכול להשפיע, ולבדוק שהמספרים שהתקבלו הם מתאימים.

3. מה היא שיטת הירידה הטלולה למציאת מינימום של פונקציה?

הוכח שאם מפעילים סיבוב אחד של שיטת הירידה הטלולה על הפונקציה

$$f(x,y)=\frac{1}{2}(Ax^2+By^2)$$

מקבלים את הרקורסיה

$$(x,y)\to\left(\frac{B^2(B-A)y^2}{A^3x^2+B^3y^2}x,\frac{A^2(A-B)x^2}{A^3x^2+B^3y^2}y\right)$$

הוכח מזה שאחרי שני סיבובים של השיטה היחס x/y איננו משתנה, גם כי הוא כן משתנה אחרי סיבוב אחד.

מה הוא האנלוג של הרקורסיה שמקבלים כאשר מפעילים סיבוב אחד של השיטה לפונקציה

$$?\ f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\frac{1}{2}(A_1x_1^2+A_2x_2^2+\ldots A_nx_n^2)$$

4. נוסחת התרבוע

$$\int_0^\infty f(x)e^{-x}dx\approx\sum_{i=1}^{3}w_if(x_i)$$

היא מדוייקת לפולינומים ממעלה 5 או פחות אם לוקחים קודקודים ומשקלות כדלהלן:

x_i	0.4157745568	2.2942803603	6.2899450829
w_i	0.7110930099	0.2785177336	0.0103892565

כמו כן הנוסחה

$$\int_0^\infty f(x)e^{-x}dx\approx\sum_{i=1}^{4}w_if(x_i)$$

היא מדוייקת לפולינומים ממעלה 7 או פחות אם לוקחים קודקודים ומשקלות כדלהלן:

x_i	0.3225476896	1.7457611012	4.5366202969	9.3950709123
w_i	0.6031541043	0.3574186924	0.0388879085	0.0005392947

העזר בשני הנוסחאות למצוא קירובים לאינטגרלים

$$\int_0^\infty \sin x e^{-x}dx\ ,\qquad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}e^{-x}dx$$

התשובות המדוייקות לאינטגרלים הם $\frac{1}{2},\frac{\pi}{4}$ בהתאם. האם אתה יכול להסביר, דרך טור הטיילור של $\sin x$, למה הסימנים של הטעויות שונים לשתי נוסחאות הקירוב?