<u>פתרון</u>

1. $A^n=0$ ⇐ כל ע.ע. רק 0. אם $J_k(0)$ בלוק של ז'ורדן מסדר k ו ע.ע. $\lambda=0$ אזי $rk(J_k(0))=k-1$.

אם $rk\,A=2$ ל $A\in Mat_{4\times4}(\mathbb{C})$ אזי ל A יש או שני בלוקים מסדר 2 או בלוק אחד מסדר 1 ובלוק אחד מסדר 3.

כלומר A דומה ל-

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

או ל-

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ב) $\deg P_A=8$ ⇐ $A\in Mat_{8\times8}(\mathbb{C})$ עם ע.ע. 0 עם ריבוי 5, -1 עם ריבוי 1, 4 עם ריבוי 2.

ל $\lambda=0$ גודל שלבלוק המקסימלי הוא 2, ל $\lambda=1$ הוא 1, ל $\lambda=4$ הוא גם 1. צורות אפשריות הן:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ & 0 & & & & & & \\ & & 0 & & & & & \\ & & & 0 & & & & \\ & & & & 0 & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & 4 & \\ & & & & & & & 4 \end{pmatrix}$$

או

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ & 0 & & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & & \\ & & & 0 & & & & \\ & & & & 0 & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & 4 & \\ & & & & & & & 4 \end{pmatrix}$$

2. א. אם $v\in(W+U)^\perp$ ⇐ $\langle v, w+u\rangle=0$ <u>לכל</u> $w\in W$, $u\in U$

⇐ $\langle v,w\rangle=0$ לכל $w\in W$ (אם נבחר $u=0$) ו $\langle v,u\rangle=0$ לכל $u\in U$

(אם נבחר $w=0$). ⇐ $v\in W^\perp$ ו גם $v\in U^\perp$ ⇐ $v\in W^\perp\cap U^\perp$

ב. אם $\langle T(u),v\rangle=0$ לכל $u,v\in V$ אזי בפרט $\langle T(u),T(u)\rangle=0$

לכל $u\in V$ ⇐ $T(u)=0$ לכל $u\in V$ ⇔ $T=0$.

3. ב. יהיו $T(v_1)=\lambda_1 v_1$, $T(v_2)=\lambda_2 v_2$ שני וקטורים עצמיים עם $\lambda_1\neq\lambda_2$.

נניח ש

$$(*)\qquad a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0$$

נפעיל T:

$$\lambda_1 a_1 v_1 + \lambda_2 a_2 v_2 = T(a_1 v_1 + a_2 v_2) = T(0) = 0$$

גם נכפיל $(*)$ ב-λ_1:

$$\lambda_1 a_1 v_1 + \lambda_1 \cdot a_2 \cdot v_2 = 0$$

ונחסיר אחד מהשני:

$$\begin{array}{rl} & \lambda_1 a_1 v_1 + \lambda_2 a_2 v_2 = 0 \\ - & \lambda_1 a_1 v_1 + \lambda_1 a_2 v_2 = 0 \\ \hline & \underbrace{(\lambda_1 a_1 - \lambda_1 a_1)}_{=0} v_1 + \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_1)}_{\neq 0} \cdot a_2 \cdot v_2 = 0 \end{array} \Rightarrow a_2 \cdot v_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0$$

כי $v_2\neq0$ (וקטור עצמי!)

ובדומה $a_1=0$ $\Leftarrow$ $\{v_1,v_2\}$ בת"ל.

א. צ"ל $|\langle x,y\rangle|\le\|x\|\cdot\|y\|$ ל-$x,y\in\mathbb{C}^n$. נניח ש $y\neq0$ (אחרת מתקיים)

יהי $\lambda\in\mathbb{C}$. מתקיים

$$0\le\|x-\lambda y\|^2=\langle x-\lambda y, x-\lambda y\rangle=\langle x,x\rangle-\bar{\lambda}\langle x,y\rangle-\lambda\langle y,x\rangle+|\lambda|^2\cdot\langle y,y\rangle$$

נציב $\lambda=\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$ ($\langle y,y\rangle\neq0!$) ונקבל

$$0\le\langle x,x\rangle-|\langle x,y\rangle|^2\cdot\langle y,y\rangle^{-1}$$

$$\Leftarrow\quad |\langle x,y\rangle|^2\le\langle x,x\rangle\cdot\langle y,y\rangle=\|x\|^2\cdot\|y\|^2$$

4. יהי $\varphi: V\to\mathbb{C}$ פונקציונאל, $\langle,\rangle$ מכפלה פנימית.

נבחר בסיס א"נ $S=\{v_1,\dots,v_n\}$. נגדיר $a_i\in\mathbb{C}$ $1\le i\le n$

ע"י $a_i=\varphi(v_i)$, $1\le i\le n$

נתבונן בפונקציונל:

$$\psi(v)=\sum_{i=1}^{n} a_i\langle v,v_i\rangle$$

נחשב $\varphi-\psi$. יהי $v\in V$. מתקיים $v=\sum_{i=1}^{n}\langle v,v_i\rangle\cdot v_i$.

<u>מקבלים:</u>

$$\varphi(v)-\psi(v)=\varphi\Big(\sum_{i=1}^{n}\langle v,v_i\rangle\cdot v_i\Big)-\sum_{i=1}^{n}a_i\langle v,v_i\rangle=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\langle v,v_i\rangle\cdot\underbrace{\varphi(v_i)}_{= a_i}-\sum_{i=1}^{n}a_i\langle v,v_i\rangle=0$$

כלומר $\varphi(v)=\psi(v)$ לכל $v\in V$.

אבל מצד שני:

$$\psi(v)=\sum_{i=1}^{n}a_i\langle v,v_i\rangle=\Big\langle v,\sum_{i=1}^{n}\overline{a_i}\,v_i\Big\rangle$$

כלומר אם נסמן $w=\sum_{i=1}^{n}\overline{\varphi(v_i)}\cdot v_i$

אז

$$\varphi(v)=\langle v,w\rangle.$$