תשע"ה **2015**

אלגברה ליניארית 1

<u>שאלון סגור</u>

מועד א. 88-112 מרצה: פרופ' א. רזניקוב.

<u>משך בחינה</u> : **3** שעות (**לאחר הארכה**).

<u>הנחיות:</u> יש לפתור את <u>כל</u> **3** השאלות. (ציון המקסימאלי הוא 100)

אין להשתמש בחומר עזר, גם לא במחשבון.

<u>נא כתבו פתרונות רק בטופס המצורף.</u> <u>המחברת לא תבדק.</u>

.1

תהי $T : F^n \to F^n$ העתקה ליניארית. נגדיר **גרף** של העתקה T ע"י
$Graph(T) := \{(v,T(v)) \mid v \in F^n\} \subseteq F^{2n}$.

א) (10 נק.) הוכיחו ש $Graph(T) \subseteq F^{2n}$ תת־מרחב.

ב) (15 נק.) חישבו $\dim Graph(T)$.

ג) (10 נק.) נניח ש T הפיך. האם $Graph(T) \cap X = \{0\}$ כאשר $X = \{(v,0) \mid v \in F^n\} \subseteq F^{2n}$.
נמקו את התשובה.

.2

תהיו $A,B,C \in M_n(F)$ מטריצות ריבועיות כך ש $A = C \cdot B$. הוכיחו או הפריכו טענות הבאות:

א) (5 נק') אם $rank(A) = rank(B) = n$ אזי C הפיכה.

ב) (15 נק') אם $n > rank(A) = rank(B) > 0$ אבל $Null(C) \cap Cspan(B) = \{0\}$ אזי בהכרח C הפיכה.

ג) (15 נק') אם $Null(A) = Null(B)$ $\cancel{Cspan(A) = Cspan(B)}$ אזי קיימת C הפיכה.

(רמז : אפשר להיאזר בהעתקות ליניאריות.)

.3

א) (10 נק') תהיו $U,V \subseteq F^n$ תתי-מרחב. הוכיחו שאם $\dim(U) + \dim(V) > n$ אזי $U \cap V \neq \{0\}$.

ב) (25 נק') תהיו $A \in M_{m\times n}(F)$ ו $B \in M_{n\times k}(F)$ מטריצות.

הוכיחו ש $rank(AB) \geq rank(A) + rank(B) - n$.

(רמז : אפשר להיאזר בהעתקות ליניאריות.)

בהצלחה!

<u>נא כתבו פתרונות רק בטופס המצורף. המחברת לא תבדק.</u>

<u>נא כתבו רק על צד אחד של הטופס.</u>

טופס פתרונות *שאלון סגור*

אלגברה ליניארית 1, מועד א. 88-112 מרצה: פרופ' א. רזניקוב.

נא כתבו פיתרון סופי <u>מפורט</u> בטופס זה. במקרה חרום מותר להשתמש בדף נוסף המצורף בסוף הטופס.
ההתייחסות למחברת היא כטיוטה בלבד. <u>המחברת לא תבדק</u>.
<u>נא כתבו רק על צד אחד של הטופס.</u>

מס' שאלה	1	2	3	
ציון				

פתרון לשאלה: 1. (א) ת"מ $Graph(T)\subseteq F^{2n}$ $(v,u)\in Graph(T) \iff v\in F^n,\ u=T(v)$.

<u>סגירות ביחס לחיבור</u>: $(v,u),\ (v',u')\in Graph(T)$

$$(v,u)+(v',u')=(v+v',u+u')=(v+v',\underbrace{T(v)+T(v')}_{T(v+v')})\in Graph(T)$$

<u>סגירות ביחס לכפל</u>: $(v,u)\in Graph(T)$, $\alpha\in F$.

$$\alpha(v,u)=(\alpha v,\alpha u)=(\alpha v,\alpha\cdot T(v))=(\alpha v,T(\alpha v))\in Graph(T)$$

<u>לא ריק</u>: $(0,0)=(0,T(0))\in Graph(T)$.

(ב) $\dim Graph(T)=n$,

<u>דרך א'</u>: יהי $\{e_1,\dots,e_n\}\subseteq F^n$ בסיס. אז $\{(e_1,T(e_1)),\dots,(e_n,T(e_n))\}\subseteq Graph(T)$ בסיס.

<u>פורש</u>: אם $(v,T(v))\in Graph(T)$ אז קיימים $\alpha_i\in F$, $1\le i\le n$ כך ש- $v=\sum\alpha_i e_i$.
מקבלים:

$$(v,T(v))=\left(\sum\alpha_i e_i,T\left(\sum\alpha_i e_i\right)\right)=\left(\sum\alpha_i e_i,\sum\alpha_i T(e_i)\right)=\sum\alpha_i\cdot(e_i,T(e_i)).$$

<u>אי-תלות</u>: אם

$$0=(0,0)=\sum\alpha_i(e_i,T(e_i))=\left(\sum\alpha_i e_i,T\left(\sum\alpha_i e_i\right)\right)$$

אז $\sum\alpha_i e_i=0 \Rightarrow \alpha_i=0$ לכל i כי $\{e_i\}$ בת"ל ב-F^n.

<u>דרך ב'</u>: נגדיר העתקה $\tilde{T}:F^n\to F^{2n}$ ע"י $\tilde{T}(v)=(v,T(v))$. $\tilde{T}$ לינארית! $Im\,\tilde{T}=Graph(T)$. מתקיים $Ker\,\tilde{T}=\{0\}$ בגלל שאם $\tilde{T}(v)=(v,T(v))=(0,0)$ אז $v=0 \Rightarrow T(v)=0$.
לפי נוסחת המימדים:

$$\dim Graph(T)=\dim Im\,\tilde{T}=n-\underbrace{\dim Ker\,\tilde{T}}_{=0}=n.$$

(ג) כן. T הפיך $\iff KerT=\{0\}$. מקבלים:

$$Graph(T)\cap X:=\left\{(v,u)\ \middle|\ \begin{matrix}u=0\\ u=T(v)\end{matrix}\quad u,v\in F^n\right\}=\{(0,0)\}.$$

פתרון לשאלה 2: א) נכון: מתקיים $n = rank(A) = rank(CB) \le rank C \le n$.
$\Leftarrow$ $rank C = n \Leftrightarrow$ C הפיכה.

ב) לא נכון: דוגמה $A = B = C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

ג) נכון: דרך א) אם $Null(A)=Null(B)$ אז למערכות $Ax=0$ ו $Bx=0$
יש אותו מרחב הפתרונות כלומר הן שקולות. למערכות
שקולות קיימת סדרה של פעולות אלמנטריות שמעבירות מערכת
אחת לשניה. סדרה של פעולות אלמנטריות אפשר להציג
כי כפל במטריצה הפיכה $\Leftarrow$ קיימת C הפיכה כך ש $A = CB$.

דרך ב): נעבור להעתקות: מתקיים $T_A, T_B: F^n \to F^n$ מוגדרות ע"י $T_A(v)=A\cdot v$, $T_B(v)=B\cdot v$.
מתקיים $Ker T_A = Null(A) = Null B = Ker T_B$. ונבחר בסיס $\{v_1 .. v_k\}$ ל- $Ker T_A = Ker T_B$.
נשלים אותו לבסיס ב F^n ע"י וקטורים $\{u_1, \dots u_r\}$, $r+k=n$. מתקיים:
וקטורים $\{T_A(u_i)\}$ בת"ל ו $\{T_B(u_i)\}$ בת"ל (בנפרד!). אחרת
$\sum \alpha_i T_{A/B}(u_i) = 0 \Rightarrow T_{A/B}(\sum \alpha_i u_i) = 0$ $\Leftarrow$ $\sum \alpha_i u_i \in Ker T_{A/B}$ אבל $\{v_1 .. v_k, u_1 .. u_r\}$ בת"ל.
נבחר וקטורים $\{w_1 .. w_k\} \subseteq F^n$ כך ש $\{w_1 .. w_k, T_A(u_1) .. T_A(u_r)\}$ בסיס ב F^n ! וקטורים $\{z_1 .. z_k\}$
כך ש $\{z_1 .. z_k, T_B(u_1), .. T_B(u_r)\}$ גם בסיס ב- F^n.

פתרון לשאלה : נגדיר העתקה $T_C: F^n \to F^n$ ע"י $T_C(z_i)=w_i$, $1 \le i \le k$, $T_C(T_B(u_i)) = T_A(u_i)$, $1 \le i \le r$.
מתקיים $T_A = T_C \circ T_B$ בכלל כי הן שוות על בסיס $\{v_1, .. v_k, u_1, .. u_r\}$.
וגם $Im T_C = Span\{w_1 .. w_k, T_A(u_1) .. T_A(u_r)\} = F^n$ כלומר $\dim Im T_C = n \Rightarrow T_C$ הפיכה
$\Leftarrow$ קיימת מטריצה C של T_C בבסיס הסטנדרטי כך ש- $A = C \cdot B$.

שאלה 3: א) נשתמש ב $\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V)$.
$U+V \subseteq F^n \Rightarrow \dim(U+V) \le n$. מקבלים:

$$n \ge \dim(U+V) = \underbrace{\dim U + \dim V}_{> n \text{ לפי נתון}} - \dim(U+V) \Rightarrow$$

$$\dim(U \cap V) \ge \dim U + \dim V - n > 0$$ $\Leftarrow$ $\dim(U \cap V) > 0$ $\Leftarrow$ $U \cap V \ne \{0\}$.

דף נוסף. פתרון ל-3-ב: נתבונן בהעתקות $T_A: F^n \to F^m$, $T_B: F^k \to F^n$, $T_{AB}: F^k \to F^m$

מוגדרות ע"י $T_A(v)=A\cdot v$, $T_B(v)=Bv$, $T_{AB}(v)=ABv$. מתקיים $\dim \mathrm{Im}(T_{AB}) = \operatorname{rank} AB$

$\dim \mathrm{Im}\, T_A = \operatorname{rank} A$, $\dim \mathrm{Im}\, T_B = \operatorname{rank} B$.

<u>דרך א</u>: נגדיר העתקה $\tilde{T}_A: \mathrm{Im}\, T_B \to F^m$ ע"י $\tilde{T}_A(v) = A\cdot v$ ל-$v \in \mathrm{Im}\, T_B$.

($\tilde{T}_A$ נקראת צמצום של T_A לתת-מרחב $\mathrm{Im}\, T_B \subseteq F^n$). מתקיים: $\mathrm{Im}\, \tilde{T}_A = \mathrm{Im}\, T_{AB}$

תחום ההגדרה של $\tilde{T}_A$ הוא $\mathrm{Im}\, T_B$.

בגלל שאם $u \in \mathrm{Im}\, T_{AB}$ אז קיים $v \in F^k$ כך ש- $u = T_{AB}(v) = \underbrace{A(B\cdot v)}_{\tilde{T}_A(B\cdot v)}$, $Bv \in \mathrm{Im}\, T_B$

$\Leftarrow u \in \mathrm{Im}\, \tilde{T}_A$. ולהפך.

גם $\mathrm{Ker}\, \tilde{T}_A = \mathrm{Im}\, T_B \cap \mathrm{Ker}\, T_A$ בגלל שאם $w \in \mathrm{Ker}\, \tilde{T}_A$ אז $\tilde{T}_A(w) = A(Bv) = 0$ ל-$w = B\cdot v$.

להעתקה $\tilde{T}_A$ מתקיים

$$\underbrace{\dim \mathrm{Im}\, T_B}_{\text{תחום ההגדרה של } \tilde{T}_A} = \underset{\mathrm{Im}\, T_{AB}}{\dim \mathrm{Im}\, \tilde{T}_A} + \underset{\mathrm{Im}\, T_B \cap \mathrm{Ker}\, T_A}{\dim \mathrm{Ker}\, \tilde{T}_A}$$

אבל: $\mathrm{Ker}\, \tilde{T}_A \subseteq \mathrm{Im}\, T_B \cap \mathrm{Ker}\, T_A \subseteq \mathrm{Ker}\, T_A$ $\Leftarrow$

$$\dim \mathrm{Ker}\, \tilde{T}_A \le \dim \mathrm{Ker}\, T_A = n - \dim \mathrm{Im}\, T_A = n - \operatorname{rank} A$$

$\Leftarrow$

$$\operatorname{rank}(AB) = \dim \mathrm{Im}\, \tilde{T}_A = \overset{\operatorname{rank} B}{\overset{\shortparallel}{\dim \mathrm{Im}\, T_B}} - \overset{n - \operatorname{rank} A}{\overset{\wedge}{\dim \mathrm{Ker}\, \tilde{T}_A}} \ge \operatorname{rank} B + \operatorname{rank} A - n.$$

<u>דרך ב</u>: מתבוננים בתת-מרחבים: $\mathrm{Im}\, T_B \subseteq F^n$, $\mathrm{Ker}\, T_A \subseteq F^n$, $\mathrm{Im}\, T_B \cap \mathrm{Ker}\, T_A \subseteq$, $\mathrm{Im}\, T_{AB} \subseteq F^m$

עם מימדים $\operatorname{rank} AB = \dim \mathrm{Im}\, T_{AB} = r$ ו- $\dim(\mathrm{Im}\, T_B \cap \mathrm{Ker}\, T_A) = s$.

נבחר בסיס $\{v_1, \dots, v_r\}$ ל-$\mathrm{Im}\, T_{AB}$. נמצא ווקטורים $u_1, \dots, u_r \in F^n$ כך ש- $T_A(u_i) = v_i$, $1 \le i \le r$,

מתקיים $u_i \in \mathrm{Im}\, T_B$ בגלל ש: $\mathrm{Im}\, T_{AB} = T_A(\mathrm{Im}\, T_B)$ ($v \in \mathrm{Im}\, T_{AB} \Leftarrow v = T_{AB}(w) = A\cdot \underbrace{B\cdot w}_{T_B(w)}$).

נבחר <u>בסיס</u> $\{z_1, \dots, z_s\}$ ל-$\mathrm{Ker}\, T_A \cap \mathrm{Im}\, T_B \le F^n$.

נוכיח ש- $\{z_1, \dots, z_s, u_1, \dots, u_r\}$ בסיס ל-$\mathrm{Im}\, T_B$. אם נוכיח זאת אז מתקיים

$s \le \dim \mathrm{Ker}\, T_A = n - \dim \mathrm{Im}\, T_A = n - \operatorname{rank} A$ ואז

$$\operatorname{rank} AB = \dim \mathrm{Im}\, T_{AB} = r = \underbrace{r+s}_{\operatorname{rank} B} - s \ge \operatorname{rank} B - (n - \operatorname{rank} A).$$

<u>הוכחה ש</u>: $\{z_1, \dots, z_s, u_1, \dots, u_r\}$ בסיס ל-$\mathrm{Im}\, T_B$. <u>א-תלות</u>: אם $\sum \alpha_i z_i + \sum \beta_j u_j = 0$ אז

$$T_A\left(\sum \alpha_i z_i + \sum \beta_j u_j\right) = \sum \alpha_i \underbrace{T_A(z_i)}_{=0} + \sum \beta_j \underbrace{T_A(u_j)}_{=v_j} = 0 \Rightarrow \beta_j = 0$$ בגלל ש-$\{v_j\}$ בת"ל

$\Rightarrow \sum \alpha_i z_i = 0 \Rightarrow$ בגלל ש-$\{z_i\}$ בת"ל $\alpha_i = 0$.

<u>פורש</u>: אם $v \in \mathrm{Im}\, T_B$ אז קיים $w \in F^k$ כך ש- $v = T_B(w)$. נתבונן ב- $T_{AB}(v) = T_A(T_B(w)) \in \mathrm{Im}\, T_{AB}$. קיימים β_j

כך ש- $T_{AB}(w) = T_A(v) = \sum \beta_j v_j$ בגלל ש-$\{v_j\}$ בסיס ב-$\mathrm{Im}\, T_{AB}$. $\Leftarrow$

$$T_A\left(v - \sum \beta_j u_j\right) = T_A(v) - \sum \beta_j v_j = 0 \Rightarrow v - \sum \beta_j u_j \in \mathrm{Ker}\, T_A \Rightarrow$$ קיימים α_i כך ש: $v = \sum \alpha_i z_i + \sum \beta_j u_j$

∎