

אלגברה ליניארית 1

מועד א. 88-112 מרצה: פרופ' א. רזניקוב.

משך בחינה: 3 שעות (לאחר הארכה).

הנחיות: יש לפתור את כל 3 השאלות.

אין להשתמש בחומר עזר, גם לא במחשבון.

נא כתבו פתרונות רק בטופס המצורף. המחברת לא תבדק.

1.

תהיו $B \in M_{n \times k}(F)$, $A \in M_{m \times n}(F)$ מטריצות.

(א) (15 נק.) הוכיחו שאם עמודות של AB בת"ל אזי גם עמודות של B הן בת"ל.

(ב) (15 נק.) נניח שעמודות של B הן בת"ל. הראו שתנאי הכרחי כדי שעמודות של AB

יהיו בת"ל הוא $rk(A) \geq k$. האם תנאי הזה מספיק? נמקו.

2.

(א) (15 נק.) תהי $V \subseteq F^n$ תת-מרחב. הוכיחו ש קיים תת-מרחב $U \subseteq F^n$ כך ש $F^n = U \oplus V$.

(ב) (20 נק.) תהיו $B, A \in M_{m \times n}(F)$ מטריצות שמקיימות $rk(A+B) = rk(A) + rk(B)$.

הוכיחו ש $Rspan(A) \cap Rspan(B) = \{0\}$ ו $Cspan(A) \cap Cspan(B) = \{0\}$.

($Cspan$ מסמל מרחב העמודות ו $Rspan$ מרחב השורות)

3.

(א) (5 נק.) תהי $A \in M_{n \times n}(F)$ מטריצה. הגדירו מטריצה צמודה קלסית $adj A$.

(ב) (30 נק.) תהי $A \in M_{n \times n}(F)$ מטריצה עם $rk(A) = n-1$ ($n \geq 2$).

הוכיחו ש $rk(adj A) = 1$.

בהצלחה!

נא כתבו פתרונות רק בטופס המצורף. המחברת לא תבדק.

נא כתבו רק על צד אחד של הטופס.

פתרון לשאלה 2: $F^n = 0 \oplus F^n$! $U = F^n, V = \{0\}$ (א) $U = \{0\} \subseteq F^n, V = F^n$ (ב)
 פתרון לשאלה 2: $F^n = 0 \oplus F^n$! $U = F^n, V = \{0\}$ (א) $U = \{0\} \subseteq F^n, V = F^n$ (ב)

$F^n = V \oplus U$ $U = \text{Span}\{u_1, \dots, u_m\} \subseteq F^n$ $V = \{v_1, \dots, v_k\} \subseteq F^n$
 $V + U \supseteq \text{Span}\{S \cup T\} = F^n$ $S = \{v_1, \dots, v_k\} \subseteq V$ $T = \{u_1, \dots, u_m\} \subseteq U$

$w = v + u$ $v \in V, u \in U$ $w \in F^n$ $w = \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i + \sum_{j=1}^m \beta_j u_j$
 $w = \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i + \sum_{j=1}^m \beta_j u_j$ $v \in V, u \in U$ $w = v + u$ $w \in F^n$ $w = \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i + \sum_{j=1}^m \beta_j u_j$

$\dim(\text{Rspan}(A+B)) \leq \dim(\text{Rspan} A + \text{Rspan} B) \leq \dim(\text{Rspan} A) + \dim(\text{Rspan} B)$
 $\dim(\text{Rspan}(A+B)) = \dim(\text{Rspan} A + \text{Rspan} B) - \dim(\text{Rspan} A \cap \text{Rspan} B)$

$\dim(\text{Rspan}(A+B)) = \dim(\text{Rspan} A + \text{Rspan} B) - \dim(\text{Rspan} A \cap \text{Rspan} B)$
 $\dim(\text{Rspan} A + \text{Rspan} B) = \dim(\text{Rspan} A) + \dim(\text{Rspan} B) - \dim(\text{Rspan} A \cap \text{Rspan} B)$