

## אלגברה ליניארית I

מועד א. 88-112

מרצה: ד"ר א. רזניקוב.

משך בחינה: שעתיים וחצי (לאחר הארכה).  
 הנחיות: יש לפתור 4 מתוך 5 השאלות.  
 אין להשתמש בחומר עזר, גם לא במחשבון.  
 נא כתבו פתרונות רק בטופס המצורף. המחברת לא תבדק.

1. למטריצה  $A \in Mat_{m \times n}(F)$  נסמן ב  $Null(A) \subseteq F^n$  מרחב הפתרונות של  $Ax = 0$  וב  $C(A) \subseteq F^m$  מרחב העמודות.  
 (א) הוכיחו שלמטריצות  $A \in Mat_{m \times n}(F)$  ו  $B \in Mat_{n \times k}(F)$  מתקיים  $A \cdot B = 0$  אם ורק אם  $C(B) \subseteq Null(A)$ . (5 נק')  
 (ב) יהיו  $A, B \in Mat_{3 \times 3}(F)$  כך ש  $rank(A) = rank(B) = 2$ . הוכיחו ש  $A \cdot B \neq 0$ . (5 נק')  
 (ג) יהי  $A \in Mat_{n \times n}(F)$  המקיימת  $A^2 = 0$ . הוכחו ש  $rank(A) \leq \frac{n}{2}$ . (15 נק' + 5 בונוס)  
 (רמז: השתמשו במשפט על  $(rank(A) + \dim(Null(A)))$ )

2. (א) יהי  $V = Mat_{n \times n}(F)$ ,  $U = \{A \in V \mid A^t = -A\} \subseteq V$  ו  $W \subseteq V$  מרחב מטריצות משולשות עליונות. הוכיחו ש  $V = U \oplus W$ . (10 נק')  
 (ב) יהיו  $V$  מרחב ווקטורי ו  $A \in V$  קבוצה בת"ל פורשת  $V$ . הוכיחו שלכל  $v \in V$  ווקטור שונה מאפס קבוצה  $A \cup \{v\}$  היא ת"ל. (15 נק')

3. (א) הוכיחו שמטריצת מעבר מבסיס לבסיס היא הופכית. (15 נק')  
 (ב) הוכיחו שלכל מטריצות  $A, B \in Mat_{n \times n}(F)$  מתקיים  $tr(AB) = tr(BA)$ . (10 נק')

4. יהי  $V$  מרחב ווקטורי מעל שדה  $\mathbb{Z}_2$  משני איברים. נניח ש  $\dim V = 2$ . חשבו כמה יש תתי-מרחב  $U \subseteq V$  שונים. נמקו את התשובה. (25 נק')

5. הוכחו ש ל  $A \in Mat_{n \times n}(F)$ ,  $n > 2$  ו  $\det(A) \neq 0$  מתקיים  
 $adj(adj(A)) = (\det A)^{n-2} \cdot A$ . (25 נק')  
 (כאשר  $adj(A)$  מסמן מטריצה צמודה קלאסית.)

**בהצלחה!**

נא כתבו פתרונות רק בטופס המצורף.  
 המחברת לא תבדק.