החבורה הסימטרית (88807) \ פרופ' רון עדין
תשובות לשאלות בחינה תשע"ו (מועד א')

.1

א) אם $\pi=(i_1,\ldots,i_k)\in S_n$ הוא מחזור באורך k, $\sigma\in S_n$ תמורה כלשהי, אז גם $\sigma\pi\sigma^{-1}=(\sigma(i_1),\ldots,\sigma(i_k))$ הוא מחזור באורך k. מכיוון שכל תמורה היא מכפלה של מחזורים זרים, נובע שלתמורות צמודות יש אותו מבנה מחזורים. בכוון השני: אם $\pi=(i_{11},\ldots,i_{1k_1})\cdots(i_{t1},\ldots,i_{tk_t}),\ \pi'=(j_{11},\ldots,j_{1k_1})\cdots(j_{t1},\ldots,j_{tk_t})$ הן תמורות בעלות אותו מבנה מחזורים, אז התמורה $\sigma\in S_n$ המוגדרת ע"י $(\forall p,q)$ $\sigma(i_{pq})=j_{pq}$ מקיימת $\sigma\pi\sigma^{-1}=\pi'$ ולכן π,π' צמודות.

ב) <u>פתרון א:</u> כידוע, מחלקת צמידות ב- S_n מתפצלת ב- A_n אם ורק אם היא מתאימה לחלוקה של n לחלקים אי-זוגיים שונים. החלוקה $(4,2)$ אינה כזאת, ולכן שתי התמורות הנתונות צמודות גם ב- A_6.

<u>פתרון ב:</u> ברור שהתמורות הנתונות צמודות ע"י $(4,5)=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&3&5&4&6\end{pmatrix}$, אבל זו תמורה אי-זוגית. מאחר שהתמורה $(5,6)$ היא אחד המחזורים הזרים של התמורה השמאלית ולכן מתחלפת איתה, המכפלה $\sigma=(4,5)(5,6)=(4,5,6)$ היא זוגית ומקיימת $\sigma(1,2,3,4)(5,6)\sigma^{-1}=(1,2,3,5)(4,6)$. לכן התמורות צמודות גם ב- A_6.

.2

א) באינדוקציה על n: עבור $n=1$ שני האגפים הם q^0.
שלב האינדוקציה: הורדת המספר n מתמורה $\pi\in S_n$, כאשר $\pi(i)=n$, מקטינה את מספר ההיפוכים ב-$(n-i)$. כל תמורה ב- S_{n-1} מתקבלת כך n פעמים, ולכן הפונקציה היוצרת של inv על S_n שווה לפונקציה היוצרת על S_{n-1} כפול

$$\sum_{i=1}^{n} q^{n-i}=1+q+\ldots+q^{n-1}$$

ומכאן הטענה.

ב) יש כמה הוכחות, למשל ע"י גזירת הפונקציה היוצרת מסעיף א', או ע"י שימוש בפלינדרומיות שלה, הנובעת מכך שעבור התמורה $\sigma\in S_n$ המוגדרת ע"י $(1\le i\le n)\quad \sigma(i)=n+1-i$ מתקיים $inv(\pi)+inv(\sigma\circ\pi)=\binom{n}{2}$ לכל $\pi\in S_n$.

.3

א) השוויון הנטען שקול לשוויון

$$\prod_{c\in[\lambda]} h_c=\frac{\prod_i \ell_i!}{\prod_{i<j}(\ell_i-\ell_j)}$$

אפשר להוכיח אותו באינדוקציה על מספר העמודות של λ: קל לראות ישירות שעבור כל תא $c=(1,i)$ בעמודה הראשונה מתקיים $h_c=\lambda_i+t-i=\ell_i$. מספיק לכן להוכיח

שמכפלת ארכי הווים בכל שאר העמודות היא $\frac{\prod_i (\ell_i - 1)!}{\prod_{i<j} (\ell_i - \ell_j)}$, וזוהי בדיוק הטענה עבור החלוקה $\lambda' = (\lambda_1 - 1, \dots, \lambda_t - 1)$ שהיא בעלת פחות עמודות מ-λ. צריך לטפל גם במקרה שחלק מהחלקים ב-λ', למשל $\lambda_t - 1$, מתאפסים (ואז מספר החלקים קטן מ-t).

ב) המימד $\chi^\lambda(1) = f^\lambda$ הוא מספר טבלאות יאנג הסטנדרטיות מצורה λ, ולפי נוסחת הווים (שהוזכרה בסעיף א') הוא כמובן מחלק את $n!$.

4.

א) תת-סדרה עולה ארוכה ביותר: 1236. תת-סדרה יורדת ארוכה ביותר: למשל 542.

ב) לפי משפט שנסטד, בדיאגרמה של λ אורך השורה הראשונה הוא 4 (אורך תת-הסדרה העולה הארוכה ביותר) ואורך העמודה הראשונה הוא 3 (אורך תת-הסדרה היורדת הארוכה ביותר). בשורה הראשונה ובעמודה הראשונה יש אם כן, יחד, 6 תאים, והתא השביעי חייב להיות בשורה השניה. לכן $\lambda = (4,2,1)$.

ג) אלגוריתם רובינסון-שנסטד נותן

$$(P,Q) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 & & 1 & 3 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & & & , & 2 & 4 & & \\ 5 & & & & & 5 & & & \end{pmatrix}$$

והצורה המשותפת היא אכן $\lambda = (4,2,1)$.

5.

א) גדלי 7 מחלקות הצמידות ב-S_5:

μ	(5)	(41)	(32)	(311)	(221)	(2111)	(11111)
$\lvert C_\mu \rvert$	24	30	20	20	15	10	1

סכום הגדלים הוא כמובן $5! = 120$.

ב) ערכי הכרקטר $\chi^{(4,1)}$ על מחלקות הצמידות, לפי נוסחת מורנגן-נקיאמה:

μ	(5)	(41)	(32)	(311)	(221)	(2111)	(11111)
$\chi^{(4,1)}(\mu)$	-1	0	-1	1	0	2	4

ג) $\langle \chi, \chi \rangle = \frac{1}{120}\left(24\cdot(-1)^2 + 30\cdot 0^2 + 20\cdot(-1)^2 + 20\cdot 1^2 + 15\cdot 0^2 + 10\cdot 2^2 + 1\cdot 4^2\right) = 1$.