

החבורה הסימטרית (88807) \ פרופ' רון עדין בחינת סיום (מועד א')

משך הבחינה: שלוש שעות.
 אין להשתמש בכל חומר עזר, גם לא במחשבון.
 יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות. כל השאלות שוות-משקל.
 נא להסביר ולנמק בבירור את הפתרון, ולכלול במחברת את כל החישובים הנחוצים.

בהצלחה!

1. (א) הוכיחו: שתי תמורות ב- S_n הן צמודות אם ורק אם יש להן אותו מבנה מחזורים (כחלוקה של n).
 (ב) האם שתי התמורות הזוגיות $(1, 2, 3, 4)(5, 6)$, $(1, 2, 3, 5)(4, 6)$ הן צמודות ב- A_6 ? הוכיחו.
2. (א) מספר ההיפוכים של תמורה π מוגדר ע"י

$$inv(\pi) := \#\{(i, j) \mid i < j, \pi(i) > \pi(j)\}$$

 הוכיחו, לכל $n \geq 1$:

$$\sum_{\pi \in S_n} q^{inv(\pi)} = \prod_{k=1}^n (1 + q + \dots + q^{k-1})$$

 (ב) הוכיחו, בכל דרך שהיא: התוחלת של $inv(\pi)$ על כל התמורות $\pi \in S_n$ היא $n(n-1)/4$.
3. (א) תהי $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_t)$ חלוקה. הוכיחו את שוויון נוסחת אורכי הווים והנוסחה הכפלית של פרובניוס:

$$\frac{|\lambda|!}{\prod_{c \in [\lambda]} h_c} = \frac{|\lambda|!}{\prod_i \ell_i!} \cdot \prod_{i < j} (\ell_i - \ell_j)$$

 כאשר $|\lambda| = \lambda_1 + \dots + \lambda_t$, $\ell_i = \lambda_i + t - i$, h_c הוא אורך הוו של תא c בדיאגרמה $[\lambda]$.
 (ב) הוכיחו שלכל כרקטר אי-פריק χ של S_n , המימד $\chi(1)$ מחלק את $n!$.
4. תהי $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 7 & 4 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.
 (א) מצאו תת-סדרה עולה ארוכה ביותר ותת-סדרה יורדת ארוכה ביותר ב- π .
 (ב) בעזרת סעיף א', מצאו את הצורה המשותפת λ של זוג הטבלאות (P, Q) המתאימות ל- π ע"י אלגוריתם RSK (בלו לחשב את P ואת Q).
 (ג) חשבו את P ואת Q במפורש, והשוו לתוצאת סעיף ב'.
5. (א) רשמו את גודלי 7 מחלקות הצמידות ב- S_5 . מהו סכום הגדלים?
 (ב) יהי χ הכרקטר האי-פריק של S_5 המתאים לחלוקה $\lambda = (4, 1)$. רשמו את ערכי χ על כל מחלקות הצמידות ב- S_5 .
 (ג) בדקו, בעזרת תוצאות סעיף ב', את קיום השוויון $\langle \chi, \chi \rangle = 1$.