

החבורה הסימטרית (88807) \ פרופ' רון עדין בחינה לדוגמה

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).
 מותר להשתמש בדף הנוסחאות המצורף. אין להשתמש בכל חומר עזר אחר, פרט
 למחשבון.
 יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות. כל השאלות שוות-משקל.
 נא להסביר ולנמק בבירור את הפתרון, ולכלול במחברת את כל החישובים הנחוצים.

בהצלחה!

.1

(א) הפעילו את אלגוריתם רובינסון-שנסטד על התמורה

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

ומצאו את זוג הטבלאות (P, Q) .

(ב) מתוך התבוננות בטבלאות מצאו את האורך המירבי של תת-סדרה עולה של π , וכן את האורך המירבי של תת-סדרה יורדת של π . רשמו במפורש תתי-סדרות באורכים אלו.

.2

(א) האם התמורות $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 2 & 5 & 3 & 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$, $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

צמודות זו לזו ב- S_7 ?

(ב) תנו דוגמה של שתי תמורות (זוגיות) $\pi, \sigma \in A_n$ שהן צמודות ב- S_n אך אינן צמודות ב- A_n . נמקו.

.3 תהי $X^\lambda : S_5 \rightarrow GL_d(\mathbb{C})$ הצגה אי-פריקה המתאימה לחלוקה $\lambda = (4, 1)$.

(א) מהו ממד ההצגה d ?

(ב) חשבו את ערך הכרקטר המתאים χ^λ על החילופים $s_1 = (1, 2)$, $s_2 = (2, 3)$.

(ג) מהו מספר ההצגות האי-פריקות של S_5 ? נמקו.

.4 נתונה החבורה $G = \langle a, b \mid a^2, b^2, (ab)^6 \rangle$.

(א) מצאו את אורך האיבר $g = bababaab \in G$.

(ב) מהו מספר אברי G ? נמקו.

.5 עבור $\pi \in S_n$ נסמן:

$$exc(\pi) := \#\{i \mid 1 \leq i \leq n-1, \pi(i) > i\}$$

$$des(\pi) := \#\{i \mid 1 \leq i \leq n-1, \pi(i) > \pi(i+1)\}$$

(א) הוכיחו שלפרמטרים exc, des יש אותה התפלגות על S_n :

$$\sum_{\pi \in S_n} q^{exc(\pi)} = \sum_{\pi \in S_n} q^{des(\pi)}$$

(ב) מצאו את כל התמורות ב- S_n שעבורן $exc(\pi) = n-1$, ואת כל אלו שעבורן $des(\pi) = n-1$.