החבורה הסימטרית (88807) \ פרופ' רון עדין
בחינת סיום (מועד ב')

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).
מותר להשתמש בדף הנוסחאות המצורף. אין להשתמש בכל חומר עזר אחר, פרט למחשבון.
יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות. כל השאלות שוות-משקל.
נא להסביר ולנמק בבירור את הפתרון, ולכלול במחברת את כל החישובים הנחוצים.

בהצלחה!

1. תהי $\lambda=(6,4,2)$.
   א) הוכיחו כי $\chi^{\lambda}(\pi)=0$ עבור $\pi=(1,2,3)\in S_{12}$.
   ב) הוכיחו כי $\chi^{\lambda}(\pi)>0$ עבור $\pi=(1,2)\in S_{12}$.

2. תהי $\pi\in S_6$, ונניח שידועה טבלה אחת מזוג הטבלאות (P,Q) המתאים לה על פי אלגוריתם רובינסון-שנסטד:

$$P=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & & \end{pmatrix}$$

   א) מהו אורך תת-הסדרה העולה הארוכה ביותר של $(\pi(1),\ldots,\pi(6))$, ומהו אורך תת-הסדרה היורדת הארוכה ביותר? נמקו.
   ב) מצאו את π, אם ידוע שהיא אינבולוציה ($\pi^2=id$).

3.
   א) תהי $\pi=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 3 & 6 & 4 & 1 & 5 & 2\end{pmatrix}\in S_6$. השלימו את הערכים החסרים בתמורה $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 4 & 5 & 3 & 6 & * & *\end{pmatrix}$ כך שהיא תהיה צמודה ל-π. נמקו.
   ב) הראו שיש ב-A_6 (תת-החבורה של תמורות זוגיות ב-S_6) שתי תמורות שהן צמודות ב-S_6 אך לא ב-A_6.

4. עבור $\pi\in S_n$ נסמן:

$$exc(\pi):=\#\{i\mid 1\le i\le n-1,\ \pi(i)>i\}$$
$$des(\pi):=\#\{i\mid 1\le i\le n-1,\ \pi(i)>\pi(i+1)\}$$

   א) הוכיחו שלפרמטרים exc, des יש אותה התפלגות על S_n:

$$\sum_{\pi\in S_n} q^{exc(\pi)}=\sum_{\pi\in S_n} q^{des(\pi)}$$

   ב) מצאו את כל התמורות ב-S_n שעבורן $exc(\pi)=n-1$, ואת כל אלו שעבורן $des(\pi)=n-1$.

5. תהי $S_3 = < a, b \mid a^2, b^2, (ab)^3 >$ (הצגת קוקסטר).

א) מצאו מילה קצרה ביותר המייצגת את האיבר $g = a^3b^5a^{-1}b^4a^2b^3 \in S_3$.

ב) נגדיר:

$$X(a) = X(b) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

הוכיחו: ניתן להרחיב הגדרה זו להצגה $X : S_3 \to GL_2(\mathbb{R})$.

ג) נגדיר:

$$Y(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

הוכיחו: <u>לא ניתן</u> להרחיב הגדרה זו להצגה $Y : S_3 \to GL_2(\mathbb{R})$.