

החבורה הסימטרית (88807) \ פרופ' רון עדין בחינת סיום (מועד א')

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).
מוותר להשתמש בדף הנוסחאות המצורף. אין להשתמש בכל חומר עזר אחר, פרט למחשבון.
יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות. כל השאלות שוות-משקל.
נא להסביר ולנמק בבירור את הפתרון, ולכלול במחברת את כל החישובים הנחוצים.

מהצחה!

1. תהי $\lambda = (3, 3, 3)$.

(א) הוכיחו: אם $\pi = (1)(2, 3, 4)(5, 6, 7, 8, 9) \in S_9$ אז $\chi^\lambda(\pi) = -1$.

(ב) מצאו את $\chi^\lambda(\sigma)$ עבור $\sigma = (1)(2, 3, 4, 5)(6, 7, 8, 9) \in S_9$.

2. תהי $\pi \in S_5$, ונניח שידוע כי $\pi(5) = 4$ וכן ידועה טבלה אחת מזוג הטבלאות (P, Q) המתאים לה על פי אלגוריתם רובינסון-שנסטד:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & \end{pmatrix}$$

(א) רשמו את שתי האפשרויות עבור הטבלה P .

(ב) לכל אחת מהאפשרויות הנ"ל רשמו במפורש את הזוג (P', Q') המתאים לתמורה ההפכית π^{-1} .

3.

(א) הוכיחו: לכל $n \geq 2$, החילופים $(1, 2), (1, 3), \dots, (1, n)$ יוצרים את S_n .

(ב) הוכיחו: התמורות $(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 3, 4)$ אינן יוצרות את S_4 .

4. לחבורה הסימטרית S_3 יש 3 מחלקות צמידות ו-3 כרקטרים אי-פריקים.

(א) רשמו טבלה של ערכי כל כרקטר אי-פריק על כל מחלקת צמידות. ציינו לכל מחלקת צמידות את מספר אבריה ולכל כרקטר את ממדו.

(ב) לחבורה הנ"ל יש 4 כרקטרים דו-ממדיים. לכל אחד מהם מצא את ערכיו על כל מחלקות הצמידות (תוכל להעזר בסעיף א').

(ג) נסמן $s_1 = (1, 2)$, $s_2 = (2, 3)$ (יוצרי קוקסטר של S_3) ונגדיר:

$$X(s_1) = X(s_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

בהנחה שהגדרה זו ניתנת להרחבה להצגה $X: S_3 \rightarrow GL_2(\mathbb{R})$ (אין צורך להוכיח זאת),
זהה את הכרקטר של הצגה זו בעזרת סעיף ב' לעיל.

5.

(א) הוכיחו: הפונקציה היוצרת של מספר המחזוריים $\text{cyc}(\pi)$ עבור $\pi \in S_n$ היא

$$\sum_{\pi \in S_n} q^{\text{cyc}(\pi)} = \prod_{i=1}^n (q+i-1)$$

(ב) הוכיחו שתוחלת מספר המחזוריים של תמורה ב- S_n היא

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = (1 + o(1)) \cdot \ln n$$