החבורה הסימטרית (88807) \ פרופ' רון עדין
דף נוסחאות

פונקציות יוצרות

$$\sum_{\pi\in S_n} q^{inv(\pi)} = \sum_{\pi\in S_n} q^{maj(\pi)} = (1+q)(1+q+q^2)\cdots(1+q+\ldots+q^{n-1})$$

$$\sum_{\pi\in S_n} q^{cyc(\pi)} = \sum_{\pi\in S_n} q^{\overline{\max}(\pi)} = q(1+q)(2+q)\cdots(n-1+q)$$

$$\sum_{\pi\in S_n} q^{des(\pi)} = \sum_{\pi\in S_n} q^{exc(\pi)} = (1-q)^{n+1}\cdot\sum_{k=1}^{\infty} k^n q^{k-1}$$

נוסחת הווים

מספר טבלאות יאנג הסטנדרטיות מצורה λ (חלוקה של n) הוא

$$f^\lambda = \frac{n!}{\prod_{c\in[\lambda]} h_c}$$

כאשר h_c הוא אורך הוו של תא c בדיאגרמה $[\lambda]$.

הנוסחה הדטרמיננטית

מספר טבלאות יאנג הסטנדרטיות מצורה $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)$ (חלוקה של n) הוא

$$f^\lambda = n!\cdot\left|\frac{1}{(\lambda_i-i+j)!}\right|$$

כאשר גודל הדטרמיננטה הוא $k\times k$ ומוסכם כי $\frac{1}{m!}=0$ עבור m שלם שלילי.

הצורה האורתוגונלית של יאנג

תהי λ חלוקה של n. ההצגה X^λ (בצורה האורתוגונלית של יאנג) מוגדרת על מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$ שבסיסו מורכב מכל טבלאות יאנג הסטנדרטיות מצורה λ. פעולת היוצר $s_i=(i,i+1)\in S_n$ על טבלה T מוגדרת על-ידי

$$s_i(T) = \frac{1}{\delta_i}\cdot T + \sqrt{1-\left(\frac{1}{\delta_i}\right)^2}\cdot T^{s_i}$$

כאשר T^{s_i} היא הטבלה המתקבלת מ-λ על ידי החלפת המקומות של $i+1,i$, ואילו δ_i הוא המרחק מהאלכסון שבו נמצא i לאלכסון שבו נמצא $i+1$ (כולל סימן).

<u>הערה:</u> הטבלה T^{s_i} היא סטנדרטית, אלא אם כן $\delta_i=\pm 1$ - ובמקרים אלו (כאשר $i+1,i$ נמצאים באותה שורה או באותה עמודה של T) בין כה וכה המקדם של T^{s_i} הוא אפס.

<u>נוסחת מורנגן-נקיאמה</u>

תהי $\pi \in S_n$ תמורה עם אורכי מחזורים $c_1,\ldots,c_k$ (בסדר כלשהו), ותהי λ חלוקה של n. אזי

$$\chi^{\lambda}(\pi) = \sum_T sign(T)$$

כאשר הסכום הוא על כל הדרכים T להוריד מהדיאגרמה $[\lambda]$ רצועות שפה באורכים $c_1,\ldots,c_k$ (בסדר הנ"ל), הסימן $sign(T)$ הוא מכפלת הסימנים של רצועות השפה, והסימן של רצועת שפה הוא $(-1)^{r-1}$ כאשר r הוא מספר השורות ברצועת השפה.