החבורה הסימטרית - הרצאה מס' 5

נמשיך את הפרמטר major :

משפט: (MacMahon, 1913)

$$\sum_{\pi \in S_n} q^{maj(\pi)} = \sum_{\pi \in S_n} q^{inv(\pi)} = [n]!_q =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} (1+q+\dots+q^{k-1})$$

הוכחה: (ע"פ Foata, 1968) הוכחה קומבינטורית.

(המקור להוכחה: המאמר D. Foata, PAMS 19 (1968), 236-240

D. Knuth, Art of Computer Programming

Vol. 3, pp 21, 581)

נבנה $f: S_n \to S_n$ ח"ח ועל כך שאם $f(\pi_1) = \pi_2$ אז $maj(\pi_1) = inv(\pi_2)$.

f תקיים גם: $\pi_1(n) = \pi_2(n)$

הבנייה – באינדוקציה על n.

n=1 : טריוויאלי (אין צורך להוכיח) $|S_1| = 1$.

שלב האינדוקציה:

נניח: $n>1$, וכבר בנינו $f': S_{n-1} \to S_{n-1}$ כנ"ל.

יהי $\pi_1 \in S_n$. נסמן: $\pi_1' = (\pi_1(1), \dots, \pi_1(n-1))$

π_1' היא פונקציה ח"ח ועל מ $[n-1]$ ל $[n] \setminus \{\pi_1(n)\}$,

ולפי הנחת האינדוקציה קיימת $\pi_2' = \tilde{f}'(\pi_1')$ שגם

היא פונקציה ח"ח ועל מ $[n-1]$ ל $[n] \setminus \{\pi_1(n)\}$

[הסבר: $\tilde{f}' = g^{-1} \circ f' \circ g$ כאשר

$g: [n] \setminus \{\pi_1(n)\} \to [n-1]$ מונוטונית עולה (יחידה)]

לעבר ←

למשל: אם $n=5$,

$$[n]\setminus\{\pi_1(n)\} = \{1,3,4,5\}$$

$$g: \begin{array}{l} 1 \to 1 \\ 3 \to 2 \\ 4 \to 3 \\ 5 \to 4 \end{array} \Bigg\} \Rightarrow g(\pi_1') \in S_{n-1}$$

אז

בעזרת π_2' נגדיר $\pi_2 \in S_n$ (שהיא תהיה $f(\pi_1)$ המבוקשת). נבחין בין שני מקרים:

א) $\pi_1(n-1) < \pi_1(n)$

יהיו $x_1,\dots,x_k$ איברי הסדרה π_2' הקטנים מ- $\pi_1(n)$ (לפי הסדר, משמאל לימין)

מכיוון ש: $\pi_2'(n-1) \overset{\text{הגדרה של } f}{=} \pi_1'(n-1) \overset{\text{הגדרת } \pi_1'}{=} \pi_1(n-1) \overset{\text{הנחה}}{<} \pi_1(n)$

נקבל בהכרח $x_k = \pi_2'(n-1)$.

נרשום:

$$\pi_2' = \alpha_1 x_1 \alpha_2 x_2 \cdots \alpha_k x_k$$

כאשר x_i הם ערכים בודדים הקטנים מ- $\pi_1(n)$ (כאמור), ואילו α_i הם רצפים (אולי ריקים) של ערכים הגדולים מ- $\pi_1(n)$.

כעת נגדיר:

$$\pi_2 := x_1\alpha_1 x_2\alpha_2 \cdots x_k\alpha_k \pi_1(n) \in S_n$$

(כלומר החלפנו x_i ו- α_i).

אז:

$$maj(\pi_1) = maj(\pi_1')$$

(כי $n-1 \notin Des(\pi_1)$ לפי ההנחה)

$$inv(\pi_2) = inv(\pi_2') - \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i| + \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i| = inv(\pi_2')$$

אורך הרצף α_i

היפוכים עם $\pi_1(n)$

היפוכים בין α_i ל- x_i

לפי הנחת האינדוקציה $maj(\pi_1') = inv(\pi_2')$

ולכן $maj(\pi_1) = inv(\pi_2)$ וגם $\pi_1(n) = \pi_2(n)$.

(ב) $\pi_1(n-1) > \pi_1(n)$.

יהיו $x_1, \dots, x_k$ איברי הסדרה π_2' הגדולים מ $\pi_1(n)$ (לפי הסדר, משמאל לימין).

יהיו $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ רצפים (אולי ריקים) של ערכים הקטנים מ $\pi_1(n)$.

אזי $x_k = \pi_1(n-1)$.

רשום: $\pi_2' = \underbrace{\alpha_1 x_1}\underbrace{\alpha_2 x_2} \cdots \underbrace{\alpha_k x_k}$

ונגדיר כמו קודם:

$$\pi_2 := x_1 \alpha_1 x_2 \alpha_2 \cdots x_k \alpha_k \pi_1(n) \in S_n$$

ואז

$$maj(\pi_1) = maj(\pi_1') + (n-1)$$

$$inv(\pi_2) = inv(\pi_2') + \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i| + k = inv(\pi_2') + (n-1)$$

היפוכים בין α_i ל- x_i

היפוכים של x_i

לפי הנחת האינדוקציה $maj(\pi_1') = inv(\pi_2')$

ולכן $maj(\pi_1) = inv(\pi_2)$ וכמובן גם $\pi_1(n) = \pi_2(n)$. ונותר להראות ש f חח"ע.

כלומר ש π_1 ניתן לשחזור מ- π_2.

ברור מהבנייה שבמקרה (א)

$$\pi_2(1) = x_1 < \pi_1(n) = \pi_2(n)$$

ואילו במקרה (ב)

$$\pi_2(1) > \pi_2(n)$$

לכן, השוואת $\pi_2(1), \pi_2(n)$ תגלה לנו באיזה משני המקרים מדובר ואז נדע לחלק את π_2 לרצפים, לגלגל ל π_2', להמשיך באינדוקציה ובסוף להוסיף את $\pi_1(n) = \pi_2(n)$.

דוגמא: שלבי הבניה עבור $\pi_1 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&3&1&2&4\end{pmatrix} \in S_5$

הערכים $x_n \dots x_1$ מודגשים בקו מתחת.

$maj(\pi_1)$	π_1	π_1'	π_2'	π_2	$inv(\pi_2)$
0	5	→		5	0
1	53	5	5	53	1
3	531	53	53	531	3
3	5312	531	531	1532	3
3	53124	5312	1532	13524	3

סימונים: ○ : האחרון
⊔ : רצפים של α_i.
— : x-ים.

S_n כחבורת השיקופים

אמרנו כבר שאפשר להציג (present) את S_n ע"י יוצרים ויחסים

$$S_n = \langle S \mid R \rangle =$$

$$= \left\langle s_1,\dots,s_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{ll} s_i^2=1 & (\forall i) \\ (s_is_j)^2=1 & (|i-j|>1) \\ (s_is_{i+1})^3=1 & (\forall i<n-1) \end{array} \right\rangle$$

הערה: ב-S_n, היוצרים הם חילופים סמוכים

$$s_i=(i,i+1) \qquad (1\le i\le n-1)$$

קל לבדוק שכל היחסים הנ"ל מתקיימים

$$s_i^2=(i,i+1)^2=1$$

$$(s_is_j)^2=[(i,i+1)(j,j+1)]^2=1 \qquad (|i-j|>1)$$

$$(s_is_{i+1})^3=(i,i+1,i+2)^3=1$$

ולכן S_n היא <u>מנה</u> של החבורה $\langle S|R\rangle$ הנ"ל.
יותר קשה להראות שיש <u>שוויון</u> (טופים הנ"ל — באופן כללי לחבורות שיקופים, הלומר חבורות קוקסטר סופיות).

בחבורות שיקופים כלליות, איברים הצמודים ליוצרים s_i נקראים שיקופים (reflections) אצלנו אלו הם <u>החילופים</u> (transposition) (i,j), $i<j$.
היוצרים s_i נקראים שיקופים פשוטים (simple reflections).
אצלנו: חילופים סמוכים $(i,i+1)$.

<u>הערה</u>: $G=\langle S|R\rangle$
מחבורות קוקסטר כלליות (אפילו בחבורה כלשהי עם קבוצת יוצרים הסגורה להיפוך)
אפשר להגדיר לכל $g\in G$ אורך:

$$\ell(g):=\min\{k \mid \exists s_{i_1},\dots,s_{i_k}\in S : g=s_{i_1}\cdots s_{i_k}\}$$

[המספר המינימלי של יוצרים שמרכיבים היא g
בפרט מגדירים $\ell(1_G):=0$]

<u>טענה</u>: בחבורה הסימטרית
$\ell(\pi)=inv(\pi)$ $(\forall \pi\in S_n)$

דוגמה $n=3$

π	$l(\pi)$	$inv(\pi)$
$123 = 1_{S_3}$	0	0
$132 = s_2$	1	1
$213 = s_1$	1	1
$231 = s_1 s_2$	2	2
$312 = s_2 s_1$	2	2
$321 = s_1 s_2 s_1$ $(= s_2 s_1 s_2)$	3	3

הוכחה:

ראשית, אם $\pi \in S_n$, ו-$1 \leq i \leq n-1$, אז $\pi s_i \in S_n$ שונה מ-π בהחלפת הסדר של $\pi(i)$, $\pi(i+1)$. לכן

$$inv(\pi s_i) = inv(\pi) \pm 1$$

אם $l(\pi) = k$ ונניח $\pi = s_{i_1} \cdots s_{i_k}$

אז $inv(\pi) \leq inv(s_{i_1} \cdots s_{i_{k-1}}) + 1 \leq \dots \leq k$

כלומר $(\forall \pi \in S_n)$ $\quad inv(\pi) \leq l(\pi)$

להוכיח את השוויון בכיוון השני:

באינדוקציה על $inv(\pi)$:

$inv(\pi)=0$, בהכרח $\pi = id$, $l(\pi) = 0$.

שלב האינדוקציה:

תהי $\pi \in S_n$, $t = inv(\pi) > 0$, אז יש ל-π היפוך: $i<j$ לכן $\pi(i) > \pi(j)$. נבחר כזה עם הפרש $j-i$ מינימלי. אם $i<k<j$ אז לא יתכן $\pi(i) < \pi(k) < \pi(j)$ (כי הנחנו $\pi(i) > \pi(j)$) ולכן או (i,j) היפוך או (k,j) היפוך (או שניהם) בסתירה להנחה המינימליות של $j-i$. לכן בהכרח ~~j~~

נכון, אם כן: $\pi(i) > \pi(i+1)$. לכן

$$inv(\pi s_i) = inv(\pi) - 1 = t - 1$$

לפי הנחת האינדוקציה

$$l(\pi s_i) = inv(\pi s_i) = t-1$$

כלומר אפשר לרשום

$$\pi s_i = s_{i_1} \cdots s_{i_{t-1}}$$

ומכאן

$$\pi = s_{i_1} \cdots s_{i_{t-1}} s_i$$

$$\Longrightarrow l(\pi) \leq t = inv(\pi)$$

$\boxed{}$

הגדרה: ב S_n

$$Des(\pi) = \{ i \mid l(\pi s_i) < l(\pi) \}$$

$$\{ i \mid \pi(i) > \pi(i+1) \}$$

<u>הוכחה</u>: נובע מהמשפט הקודם.

<u>הערה</u>: בכל חבורה קוקסטר $G = \langle S \mid R \rangle$

אפשר להגדיר <u>קבוצת מורדות ימין</u>:

$$RDes(\pi) := \{ s \in S \mid l(\pi s) < l(\pi) \}$$

וגם <u>מורדות משמאל</u>:

$$LDes(\pi) := \{ s \in S \mid l(s\pi) < l(\pi) \}$$

קל לראות שבחבורת קוקסטר מתקיים תמיד
$l(\pi^{-1}) = l(\pi)$

כי אם $\pi = s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ אז

$$\pi^{-1} = s_{i_k}^{-1} \cdots s_{i_1}^{-1} = s_{i_k} \cdots s_{i_1}$$

ולהפך

קל לקבל:

$$LDes(\pi) = RDes(\pi^{-1})$$

האם עבור π תמורה כללית, יש שוויון

$$|RDes(\pi)| \overset{?}{=} |LDes(\pi)|$$

ניתן דוגמא נגדית:

$$\underset{\uparrow}{3}\ 1\ \underset{\uparrow}{4}\ 2 \qquad 2\ \underset{\uparrow}{4}\ 1\ 3$$

$\times$

אין שוויון