13.3.16



## החבורה הסימטרית — הרצאה מס' 3

### השלמה לשיעור הקודם

הצגנו "קירובים" שונים של החבורה הסימטרית $S_n$. לקראת סוף השיעור ראינו קירובים שונים לחבורות

אלגברת (Iwahori – Hecke) מטיפוס A.

$$H_q = \langle s_1, \dots, s_{n-1} \mid \cancel{s_i^2=1} \quad (s_i-1)(s_i+q)=0,$$
$$s_i s_j = s_j s_i \quad (|i-j|>1)$$
$$s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} \ (\forall i) \rangle$$

"הצגה" (presentation)

### מקרים פרטיים חשובים

$q=1$ : (אלגברת החבורה של $S_n$) $(s_i^2=1)$

$q=0$ : $(s_i^2=s_i)$ (אלגברת המונואיד של 0-הקה מונואיד.

מונואיד נוסף הקשור ל- $S_n$:

$$IS_n = \left\{ \pi \ \middle|\ \begin{array}{l} \exists A_1, A_2 \subseteq [n], \\ \pi : A_1 \to A_2 \text{ bijection} \end{array} \right\}$$

כלומר "תמורות חלקיות" של $[n]$ עם פעולת ההרכבה של (יחסים).

עוד חבורה הקשורה ל- $S_n$:

$$S_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n = \left\{ \pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \ \middle|\ \begin{array}{l} \pi \text{ חח"ע ועל}, \\ \#\{i \mid \pi(i) \neq i\} < \infty \end{array} \right\}$$

עוד חבורות: $GL_n(\mathbb{F})$ מט' מטריצות $n\times n$ הפיכות מעל שדה $\mathbb{F}$.

הערה: $S_n$ היא "המקרה הפרטי" כאשר $\mathbb{F}$ "שדה עם איבר אחד".

מצד שני, יש דואליות בין $S_n$ ל-$GL_k(\mathbb{F})$:

$S_n \times GL_k(\mathbb{F})$ פועלת על $(\mathbb{F}^k)^{\otimes n}$

כאשר $GL_k(\mathbb{F})$ פועלת באופן לכסיני על כל גורם $\mathbb{F}^k$

ואילו $S_n$ מחליפה את סדר ~~[illegible]~~ הגורמים במכפלה הטנזורית.

ישנו "משפט מרכזי": הפעולה של אחת מהן מרכזת את השניה.

$$(F^k)^{\otimes n} \Rightarrow \dim(\underbrace{F^k\otimes\cdots\otimes F^k}_{n}) = k^n$$

מכפלה טנזורית.

עד כה ראינו מבנים אלגבריים קרובים ל-$S_n$ אבל קטנים ממנה.

כעת נראה כללים הגדולים מ-$S_n$:

באופן עקרוני יותר:

הכרנו את תת-חבורות (נורמליות) של $S_n$.

יש גם חבורות כיסוי של $S_n$.

חשיבותן היא בשביל להבין הצגות פרויקטיביות של $S_n$.

מהי הצגה פרויקטיבית?

הצגה לינארית רגילה של חבורה $G$ היא הומו' של חבורות $\varphi: G \longrightarrow GL(V)$

כאשר $V$ מ"ו (נאמר מעל $\mathbb{C}$).

ואילו הצגה פרויקטיבית של $G$ היא הומו' של חבורות $\varphi: G \longrightarrow PGL(V)$ כאשר

$PGL(V) = GL(V)/$ המטריצות הסקלריות $\cong GL_k(\mathbb{F})/\{cI_k \mid c\in\mathbb{F}^\times\}$

הערה: אפשר לחשוב כי איבר $g \in PGL_k(\mathbb{F})$ כפועל על המרחב הפרויקטיבי ה- $k$ מימדי מעל $\mathbb{F}$

$$\mathbb{P}\mathbb{F}^k := \{\text{אוסף כל הישרים דרך ה-0 במרחב } \mathbb{F}^{k+1}\}$$

כאשר $(x_0, \ldots, x_k) \sim (y_0, \ldots, y_k)$

$$\iff \exists c \in \mathbb{F}^\times : y_i = c x_i \quad (\forall i)$$

מחלקת השקילות $[(x_0, \ldots, x_k)]_\sim$

היא נקודה של $\mathbb{P}\mathbb{F}^k$, המסומנת

$(x_0 : \ldots : x_k)$ (קואורדינטות הומוגניות)

$$(x_0 : \ldots : x_k) = (cx_0 : \ldots : cx_k) \quad (\forall c \in \mathbb{F}^\times)$$

מה הקשר ל $PGL_k(\mathbb{F})$?

כמובן, כל מטריצה הפיכה $A \in GL_k(\mathbb{F})$ פועלת על $\mathbb{F}^{k+1} \setminus \{\vec{0}\}$ באופן טבעי: $v \mapsto Av$

כמובן, הפעולה מתחלפת עם כפל בסקלר. ולכן $A$ גם פועלת בטבעיות על $\mathbb{P}\mathbb{F}^k$.

מטריצות סקלריות פועלות באופן טריוויאלי, (כהעתקת הזהות של $\mathbb{P}\mathbb{F}^k$), ולכן מוגדרת היטב פעולה של $GL_{k+1}(\mathbb{F}) / \{cI_{k+1}\}$ על $\mathbb{P}\mathbb{F}^k$.

דוגמא: $k=1$, $\mathbb{F}$ שדה. (הישר הפרויקטיבי)

$$\mathbb{P}\mathbb{F}^1 = \left(\mathbb{F}^2 \setminus \{(0,0)\}\right)/\sim$$
$$= \{(x_0 : x_1) \mid (x_0, x_1) \in \mathbb{F}^2 \setminus \{(0,0)\}\}$$
$$= \{(x:1) \mid x \in \mathbb{F}\} \cup \{(1:0)\}$$
$$\cong \mathbb{F} \cup \{\infty\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \quad \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

מה עושה הפעולה: הזזה ב-2 כלומר
$$x \longmapsto x+2, \quad \infty \longmapsto \infty$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \quad (x:1) \longmapsto (3x:1), \quad (1:0) \longmapsto (3:0) = (1:0)$$

מה עושה הפעולה: ~~הזזה~~
$$x \longmapsto 3x, \quad \infty \longmapsto \infty$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : \quad (x:1) \longmapsto (1:x), \quad (1:0) \longmapsto (0:1)$$

סוג הפעולה:
$$x \longmapsto \frac{1}{x}, \quad 0 \longmapsto \infty, \quad \infty \longmapsto 0$$

העתקות פרויקטיביות של $\mathbb{P}\mathbb{C}^1$

(הישר הפרויקטיבי המרוכב) הן העתקות מוביוס

$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d} \qquad (ad-bc \neq 0)$$

לענייננו: הצגה פרויקטיבית $\varphi : G \to PGL_k(\mathbb{F})$

משמע: כל איבר $g \in G$ לא מוצג ע"י מטריצה אלא ע"י מחלקת שקילות של מטריצות.

מכיוון ש $PGL_k(\mathbb{F})$ היא מנה של $GL_k(\mathbb{F})$, $(k+1\ ?)$

כל הצגה לינארית של $G$ נותנת הצגה פרויקטיבית, אך לא להיפך.

Schur (1911) גילה שהצגות פרויקטיביות של $S_n$ מתאימות (מעין חח"ע) להצגות לינאריות של חבורת כיסוי של $S_n$.

כיסוי Schur של חבורה $G$ הוא חבורה $\tilde{G}$ עם הומו' $f : \tilde{G} \to G$ כך ש:

$$\ker f \subseteq \underbrace{Z(\tilde{G})}_{\text{מרכז}} \cap \underbrace{[\tilde{G}, \tilde{G}]}_{\text{חבורת הקומוטטורים}} \qquad (1)$$

2) Shur הוכיח שלכל $n \ge 4$, לחבורה $S_n$ יש בדיוק שני "כיסוי" Schur לא איזומורפים, שניהם בגודל $2n!$.

קוקסטר

$$2S_n^- = \langle t_1, \dots, t_{n-1}, z \mid (t_i t_j)^{m_{ij}} = z,\ z^2 = 1 \rangle$$

$$= \left\langle t_1, \dots, t_{n-1}, z \;\middle|\; \begin{array}{ll} t_i^2 = 1,\ z^2 = 1 & \\ (t_i t_j)^2 = z & |i-j|>1 \\ (t_i t_{i+1})^3 = z & \forall i \end{array} \right\rangle$$

$$f : 2S_n^- \longrightarrow S_n$$
$$t_i \longmapsto s_i$$
$$z \longmapsto 1$$

$$2\cdot S_n^+ = \left\langle t_1,\dots,t_{n-1}, z \;\middle|\; \begin{array}{l} t_i^2=1,\ z^2=1 \\ (t_i z)^2=1 \\ (t_i t_j z)^2 = z \\ (t_i t_{i+1})^3 = z \end{array} \right\rangle$$

$$f: 2\cdot S_n^+ \longrightarrow S_n$$
$$t_i \longmapsto s_i$$
$$z \longmapsto 1$$

<u>הערה:</u>
סיימנו את הצגת "חלון" הרגילה של קרובים של $S_n$.
מיבוי הקרובים לא "ידונו" שוב בשיעור
קורס זה ולא יכללו כחומר לבחינה

---

## פרמטרים של תמורות

(permutations statistics)

<u>פרמטר של תמורות</u>, הגדרה:

זוהי פונקציה $p: S_n \to R$
כאשר $R$ קבוצה "חשובה".
למשל, $R = \mathbb{Z}_+$ (קבוצת המספרים השלמים האי-שליליים) הוא המצב השכיח ביותר,
אבל יתכנו גם מצבים אחרים.

<u>דוגמא: פרמטר:</u> $p: S_n \to [n]$
$$\pi \longmapsto \pi(1)$$

לפרמטר $p: S_n \to \mathbb{Z}_+$ אפשר להתאים פונקציה יוצרת
(generating function)

$$gf_n(p) = \sum_{\pi\in S_n} q^{p(\pi)} \in \mathbb{Z}[q] \quad (\text{פולינום ב- } q)$$

הפונק' היוצרת מספרת <u>כמה</u> <u>פעמים</u> מקבל
כל ערך של פרמטר:

$$gf_n(p) = \sum_{i\in\mathbb{Z}_+} \#\{\pi\in S_n \mid p(\pi)=i\}\cdot q^i$$

בדוגמא כאן: $gf_n(p) = \frac{n!}{n}\left(q^1+q^2+\dots+q^n\right)$

## נראה דוגמא יותר מעניינת:

~~[illegible]~~ מספר היפוכים

$$\mathrm{inv}(\pi) := \#\{(i,j) \mid 1 \le i < j \le n,\ \pi(i) > \pi(j)\}$$

זהו גודלה של קבוצת ההיפוכים

$$\mathrm{Inv}(\pi) := \{(i,j) \mid i<j,\ \pi(i) > \pi(j)\}$$

דוגמא: $n=3$

$$\begin{array}{lcccccc} \pi = & 123 & 132 & 213 & 231 & 312 & 321 \\ \mathrm{inv}(\pi) = & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{array}$$

לכן

$$gf_3(\mathrm{inv}) = q^0 + q^1 + q^1 + q^2 + q^2 + q^3 =$$
$$= 1 + 2q + 2q^2 + q^3 = (1+q)(1+q+q^2)$$

משפט:

$$gf_n(\mathrm{inv}) := \sum_{\pi \in S_n} q^{\mathrm{inv}(\pi)} = \prod_{i=1}^{n} [i]_q =: [n]_q!$$

כאשר

$$[i]_q := \frac{1-q^i}{1-q} = 1 + q + \dots + q^{i-1} \qquad (i \in \mathbb{Z}_+)$$

הוכחה: (קומבינטורית)

נבנה את איברי $S_n$ בצורה רקורסיבית (מתוך איברי $S_{n-1}$).

בהינתן תמורה $\pi = \pi(1)\pi(2)\cdots\pi(n-1) \in S_{n-1}$

נכניס את המספר $n$ אחרי $0 \le k \le n-1$

[illegible] $(\pi(1)$.

עבור תמורה $\tilde{\pi} \in S_n$ , ונבחר שכל תמורה
ב- $S_n$ מתקבלת פעם אחת.
כך להיות:

$$inv(\tilde{\pi}) = inv(\pi) + (n-1-k)$$

( n יוצר היפוך עם $\pi(k+1), \dots, \pi(n-1)$ )

$$gf_n(inv) = \sum_{\pi \in S_{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} q^{inv(\pi)+(n-1-k)} = \sum_{\pi \in S_{n-1}} q^{inv(\pi)} \sum_{k=0}^{n-1} q^{n-1-k}$$

$$= gf_{n-1}(inv) \cdot [n]_q$$

ובנוסף $gf_1(inv)=1$ עבור הבסיס.

∎

מסקנה: $0 \le inv(\pi) \le \binom{n}{2}$ $(\forall \pi \in S_n)$

## פרמטר נוסף: מספר המחזורים

סימון $cyc(\pi)$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\,3\,4)(2\,5)$$

$$\Longrightarrow cyc(\pi) = 2$$

דוגמא: $n=3$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\pi =$ | $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$ |
| $cyc(\pi) =$ | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 |

הסבר $(1)(2)(3)$     הסבר $(1)(23)$

$$gf_3(cyc) = 2q + 3q^2 + q^3 = q(1+q)(2+q)$$

**טענה:** $gf_n(cyc) = \prod_{i=1}^{n} (q+i-1)$

**הוכחה:**

ניקח תמורה $\pi \in S_n$ ונייצר ממנה תמורה $\tilde{\pi} \in S_{n+1}$ באופן הבא:

נרשום את $\pi$ כמכפלת מחזורים זרים, ונשים את $n$ במחזור שבו הוא מופיע.

ברור שכך נקבל כל תמורה ב־$S_{n+1}$.

השינוי של $\tilde{\pi}$ מ־$\pi$ הוא באופן הבא:

(א) אם $n$ יוצר מחזור לבדו, ואז

$$cyc(\tilde{\pi}) = cyc(\pi)+1$$

(דרך אחת לעשות זאת מ־$\pi$)

(ב) אם ש־$n$ מצטרף למחזור קיים, אחרי אחת הספרות, ואז

$$cyc(\tilde{\pi}) = cyc(\pi)$$

($n-1$ דרכים לעשות זאת מ־$\pi$)

$$\Rightarrow gf_n(cyc) = gf_{n-1}(cyc)(q+n-1)$$

וכן $gf_1(cyc)=q$

∎

**הערה:**

מקדמי $gf_n(cyc)$:

$$gf_n(cyc) = \sum_{k=1}^{n} C(n,k)\, q^k$$

נקראים "מספרי סטירלינג מסוג ראשון ללא סימן"

( Signless stirling numbers of [illegible] )

## הנ״ל עם סימן ?

$$S(n,k) = (-1)^{n-k}\, C(n,k)$$

הנוסחה

$$gf_n(cyc) = gf_{n-1}(cyc) \cdot (q+n-1)$$

נותנת <u>נוסחת רקורסיה</u>

$$C(n,k) = C(n-1,k-1) + (n-1)\, C(n-1,k) \qquad (n,k \geq 1)$$

עם תנאי התחלה

$$C(n,0) = 0 \qquad (n \geq 1)$$

$$C(0,k) = 0 \qquad (k \geq 1)$$

$$C(0,0) = 1$$