פונקציות סימטריות

(ויקשר שלהן לקרקטרים של S_n)

<u>מקורות</u>:
- Stanely, EC2, ch.7
- Sagan, ch.4
- Macdonald, Symmetric functions and Hall polinomials

יהי $X=(x_1,x_2,\dots)$ סדרה (בת מנייה)
של <u>משתנים</u> (indeterminates)

הרכב (composition) של מספר שלם אי-שלילי n
הוא סדרה $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots)$.
של מספרים שלמים אי-שליליים שסכומם n:
$\alpha_1+\alpha_2+\dots=n$

(כמובן, בהכרח $\alpha_i\neq 0$ עבור מספר <u>סופי</u> של ערכי i,
ובמילים אחרות: $\alpha_i=0$ כמעט לכל i)

{חלוקה (partition) היא הרכב המקיים ש $\alpha_1\geq\alpha_2\geq\dots\geq 0$}.

אם α הרכב של n, נסמן: $\alpha\models n$.

<u>הגדרה</u>:
יהי n מספר שלם אי-שלילי, ויהי R חוג קומוטטיבי עם יחידה
(בהמשך נקח בדר"כ: $R=\mathbb{Z}$ או $\mathbb{Q}$ או $\mathbb{C}$)
<u>פונקציה סימטרית</u>, <u>הומוגנית</u> <u>ממעלה n</u>, <u>מעל R</u>
היא ביטוי מהצורה

$$f(x)=\sum_{\alpha\models n} c_\alpha X^\alpha$$

כאשר:

א) α עובר על כל ההרכבים של n,
ואם $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots)$ אז המונום (ממעלה n)

$$X^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$$

ב) $C_\alpha \in R \quad (\forall \alpha)$

ג) לכל תמורה π של $\{1,2,\ldots\}$ ולכל הרכב
$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots)$:

$$C_{(\alpha_{\pi(1)},\alpha_{\pi(2)},\ldots)} = C_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots)}$$

[במילים אחרות $f(x_{\pi(1)},x_{\pi(2)},\ldots)=f(x_1,x_2,\ldots)$]

סימון: $\Lambda_R^n =$ אוסף כל הפונקציות הסימטריות ההומוגניות ממעלה n מעל R.

דוגמאות:

1) $f(x)=x_1+x_2+\cdots \in \Lambda_R^1$

2) $f(x)=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_1x_4+\cdots \in \Lambda_R^2$

3) $f(x)=x_1^2x_2x_3+x_1^2x_2x_4+\cdots+x_4^2x_1x_3+\cdots \in \Lambda_R^4$

הערה:
$f(x)$ נקראת "פונקציה סימטרית" מסיבות היסטוריות.
היא לא באמת פונקציה (אלא אם רוצים כל ה-x_i אפס)
היא טור חזקות פורמלי בהרבה משתנים.

הערה: Λ_R^n הוא, כמובן, חפשי, R-מודול

(אם $R=\mathbb{F}$ שדה: מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$)

הגדרה:

$$\Lambda_R := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Lambda_R^n$$

סכום ישר של R-מודולים (או: מרחבים וקטוריים),

כלומר: כל $f\in\Lambda_R$ הוא מהצורה

$$f = f_0+f_1+f_2+\cdots$$

כאשר:

$f_n\in\Lambda_R^n$ ($\forall n$), וכן $f_n=0$ עבור כמעט כל n.

איברי Λ_R נקראים פונקציות סימטריות מעל R.

הערה:

אם נקח $x_{k+1}=x_{k+2}=\dots=0$ אז Λ_R יהיה אוסף הפולינומים הסימטריים ב- $x_1,\dots,x_k$, בלי בעיות כלל,

אבל Λ_R אינם פולינומים אלא טורי חזקות פורמליים.

אבחנה:

קל לראות שמכפלה רגילה של מונומים מגדירה היטב כפל על Λ_R, ההופך אותו לחוג קומוטטיבי עם יחידה

(אם $R=\mathbb{F}$ שדה, Λ_R היא אלגברה קומוטטיבית עם יחידה מעל $\mathbb{F}$):

$$\Lambda_R^m\cdot\Lambda_R^n\subseteq\Lambda_R^{m+n}$$

(אלגברה מדורגת = graded Algebra)

(הבה נראה כמה פונקציות סימטריות מיוחדות

---

* תהי $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots)\vdash n$ חלוקה

(כלומר $\lambda_1\ge\lambda_2\ge\dots\ge0$, $\lambda_1+\lambda_2+\dots=n$)

הפונקציה הסימטרית המונומיאלית המתאימה [monomial symmetric func.]

$$m_\lambda = \sum_{\alpha\sim\lambda} x^\alpha$$

(כאשר α תמורה של λ)

הדוגמאות שראינו הן (אם נשמיט את האפסים מ-λ):

$$m_{(1)},\ m_{(1,1)},\ m_{(2,1,1)}$$

טענה: (אם R שדה)

$\{m_\lambda \mid \lambda \vdash n\}$ הוא בסיס של Λ^n_R

בפרט,

$\dim \Lambda^n_{\mathbb{F}} = p(n)$, מס׳ החלוקות של n

תרגיל:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)\, t^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-t^k}$$

$\Longleftarrow$ $\{m_\lambda \mid \lambda\}$ הוא בסיס של $\Lambda_{\mathbb{F}}$

מקרים מיוחדים:

* הפונקציה הסימטרית האלמנטרית ממעלה n:

$$e_n := m_{(1^n)} = m_{(\underbrace{1,\dots,1}_{n\text{ פעמים}},0,\dots)} = \sum_{\substack{(i_1,\dots,i_n) \\ i_1<\dots<i_n}} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n}$$

בפרט,

$$e_0 = 1$$

$$e_1 = x_1 + x_2 + \cdots$$

$$e_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + \cdots$$

$$e_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 + \cdots$$

לכל חלוקה $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_t)$

(כמובן — אוסף, כלומר $\lambda_1\geq\dots\geq\lambda_t\geq 1$), נגדיר:

$$e_\lambda = e_{\lambda_1}\cdot e_{\lambda_2}\cdots e_{\lambda_t}\in\Lambda^n_R \qquad (\text{[illegible]}\ \lambda\vdash n)$$

<u>למשל:</u>

$$e_{(2,1)} = e_2 e_1 = (x_1x_2+x_1x_3+\cdots)(x_1+x_2+\cdots) =$$

$$= x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_5^2x_2+\cdots+x_1x_2x_3+x_2x_4x_7+\cdots$$

$$= m_{(2,1)}+m_{(1,1,1)}\in\Lambda^3_R$$

e_λ יקראו <u>הפונקציה הסימטרית האלמנטרית</u> המתאימה ל- λ.

<u>טענה:</u>

לכל n שלם אי-שלילי (אם $R=F$ שדה),

$\{e_\lambda \mid \lambda\vdash n\}$ הוא בסיס של Λ^n_R.

נוסחת מעבר מפורשת בין הבסיסים $\{m_\lambda\},\{e_\lambda\}$:

$$e_\lambda=\sum_{\mu\vdash n} M_{\lambda\mu}\, m_\mu \qquad (\forall\lambda\vdash n)$$

כאשר $M_{\lambda\mu}$ הוא מספר המטריצות $A\in\{0,1\}^{\infty\times\infty}$

עם סכומי שורות λ וסכומי עמודות μ.

(בפרט $M_{\lambda\mu}=M_{\mu\lambda}$).

הפונקציה הסימטרית ההומוגנית השלמה

ממעלה n:

$$h_n := \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda = \text{סכום כל המונומים ממעלה } n$$

$$= \sum_{\substack{(i_1,\dots,i_n)\\ i_1\le i_2\le\dots\le i_n}} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n} \in \Lambda^n_R$$

בפרט:

$$h_0 = 1 = e_0$$

$$h_1 = x_1+x_2+\dots = e_1$$

$$h_2 = x_1^2+x_2^2+\dots+x_1x_2+x_1x_3+\dots = m_{(2)}+m_{(1,1)}$$

לכל חלוקה $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_t)$ (בהמשך הבסיס). נגדיר:

$$h_\lambda = h_{\lambda_1}\cdot h_{\lambda_2}\cdots h_{\lambda_t} \in \Lambda^n_R \quad (\text{אם } \lambda\vdash n)$$

למשל:

$$h_{(2,1)} = h_2h_1 = (x_1^2+x_2^2+\dots x_1x_2+x_1x_3+\dots)(x_1+x_2+\dots) =$$

$$= (x_1^3+x_2^3+\dots)+2(x_1^2x_2+\dots)+3(x_1x_2x_3+\dots)$$

$$= m_{(3)}+2m_{(2,1)}+3m_{(1,1,1)}$$

טענה:

$\{h_\lambda, \lambda\vdash n\}$ הוא בסיס של Λ^n_R.

נוסחת מעבר מפורשת:

$$h_\lambda = \sum_{\mu\vdash n} N_{\lambda\mu} m_\mu \quad (\forall \lambda\vdash n)$$

כאשר $N_{\lambda\mu}$ הוא מספר המטריצות $A\in\{0,1,2,\dots\}^{\text{מ}\times\text{מ}}$

עם סכומי שורות λ וסכומי עמודות μ.

(שימו לב $N_{\lambda\mu}=N_{\mu\lambda}$).

הערה:
לכל n, מטריצות המקדמים $(M_{\lambda\mu})_{\lambda,\mu\vdash n}$, $(N_{\lambda\mu})_{\lambda,\mu\vdash n}$
הן הפיכות מעל $\mathbb{Z}$.
לכן כל m_λ הוא צירוף לינארי עם מקדמים שלמים (לאו דווקא אי-שליליים) של e_μ (וכן של h_μ).

---

* סכומי החזקות ה-n-יות:

$$p_n = m_{(n)} = x_1^n + x_2^n + \cdots \in \Lambda^n_R$$

כאשר

$$p_0 = m_{()} = 1 \in \Lambda^0_R$$

החלוקה הריקה

לכל חלוקה $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t)$ (בלי אפסים)
נגדיר

$$p_\lambda = p_{\lambda_1} \cdot p_{\lambda_2} \cdots p_{\lambda_t} \in \Lambda^n_R \qquad (\text{אם } \lambda\vdash n)$$

טענה: (אם $R=\mathbb{F}$ שדה)
$\{p_\lambda \mid \lambda\vdash n\}$ הוא בסיס של $\Lambda^n_{\mathbb{F}}$.

גם כאן ניתן לתת פירוש קומבינטורי למקדמי מטריצת המעבר

$$p_\lambda = \sum_{\mu\vdash n} R_{\lambda\mu} m_\mu \qquad (\forall \lambda\vdash n)$$

[עיין EC2, p.297].

הערה: איברי מטריצת המעבר $(R_{\lambda\mu})_{\lambda,\mu\vdash n}$ הם שלמים אי-שליליים, אך המטריצה אינה הפיכה מעל $\mathbb{Z}$ (אלא רק מעל $\mathbb{Q}$).

סימון:

אם $\lambda = (1^{m_1}, 2^{m_2}, \dots)$ חלוקה, נגדיר

$$\varepsilon_\lambda = \prod_i (-1)^{m_i(i-1)} = (-1)^{m_2+m_4+\dots} = (-1)^{n-t}$$

כאשר t הוא מס' החלקים (השונים מאפס) ב-λ, ואילו n הוא סכומם. ("הסימן של החלוקה").

הגדרה:

נגדיר העתקה $\omega : \Lambda_{\mathbb{Q}} \to \Lambda_{\mathbb{Q}}$ ע"י:

$$\omega(p_\lambda) := \varepsilon_\lambda p_\lambda \quad (\forall \lambda)$$

והרחבה ע"י לינאריות.

הערה:

ברור ש- $\omega^2 = id$ (אינבולוציה).

ω היא כפלית, כלומר אוטומורפיזם של האלגברה $\Lambda^n_{\mathbb{F}}$ ("דואליות").

טענה:

$$\omega(e_\lambda) = h_\lambda$$
$$\omega(h_\lambda) = e_\lambda$$

---

* פונקציות שור (Schur) הסימטריות

לחלוקה λ:

$$s_\lambda = \sum_{T \in SSYT(\lambda)} x^T$$

(תזכורת: SSYT = semi-standard Young Tableaux)

כאשר $SSYT(\lambda)$ הוא אוסף המילויים של הדיאגרמה $[\lambda]$ במספרים טבעיים כך שהמספרים בכל שורה עולים חלש משמאל לימין, והמספרים בכל עמודה עולים ממש מלמעלה למטה.

$$X^T = \prod_{i=1}^{\infty} x_i^{n_i(T)} \quad \Longleftarrow$$

כאשר $n_i(T)$ הוא מס' המופעים של i בטבלה T.

<u>טענה</u>: (לא ברור מאליו)

אם $\lambda \vdash n$ אז $s_\lambda \in \Lambda^n_R$ (כלומר: סימטרי).

יתר על כן, $\{s_\lambda \mid \lambda \vdash n\}$ הוא בסיס ל Λ^n_F (לכל F שדה).

<u>הגדרה</u>:

f^λ, מס' הטבלאות <u>הסטנדרטיות</u> מצורה λ,

הוא מקדם המונום $x_1 x_2 \cdots x_n$ ב s_λ.

<u>טענה</u>:

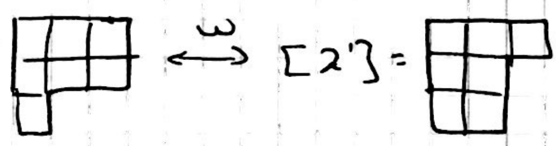
$$\omega(s_\lambda) = s_{\lambda'}$$

כאשר λ' היא החלוקה <u>הצמודה</u> ל-λ,

כלומר: הדיאגרמה $[\lambda']$ היא <u>השחלוף</u> של הדיאגרמה $[\lambda]$.

<u>לדוגמא</u>:

$\lambda = (3,3,1)$ $[\lambda] =$ $\xleftrightarrow{\omega}$ $[\lambda'] =$ $\lambda' = (3,2,2)$



<u>טענה (כבר ראינו)</u>:

מטריצת המעבר
$$s_\lambda = \sum_{\mu \vdash n} K_{\lambda\mu} m_\mu$$

כאשר מספר Kostka, $K_{\lambda\mu}$, הוא מספר

הטבלאות $T \in SSYT(\lambda)$ (צורה λ) מטיפוס μ (כלומר $\mu_i = n_i(T)$ לכל i)

<u>הערה</u>:

המטריצה $(K_{\lambda\mu})$ הפיכה מעל $\mathbb{Z}$.

קשר להצגות של S_n

<u>הגדרה</u>: (העתקת האופיינים של פרובניוס)
יהי χ כרקטר (או פונקציית מחלקה) של החבורה הסימטרית S_n. נגדיר

$$ch^n(\chi) := \frac{1}{n!}\sum_{\pi\in S_n} \chi(\pi)\, p_{cyc(\pi)} \in \Lambda^n_{\mathbb{C}}$$

כאשר $\lambda = cyc(\pi)$ היא החלוקה של n המתאימה לאורכי המחזורים של π.

<u>דוגמאות</u>:

<u>$n=2$</u>: $ch^2(\chi) = \frac{1}{2!}\left[\chi(id)\, p_{(1,1)} + \chi((1,2))\, p_{(2)}\right]$

מאחר ש-χ פונקציית מחלקה, אפשר לרשום במקום תמורה π את החלוקה $cyc(\pi)$:

$$ch^2(\chi) = \frac{1}{2}\left\{\chi_{(1,1)}\, p_{(1,1)} + \chi_{(2)}\, p_{(2)}\right\} \in \Lambda^2_{\mathbb{C}}$$

<u>$n=3$</u>: $ch^3(\chi) = \frac{1}{6}\left[\chi_{(1,1,1)}\, p_{(1,1,1)} + 3\chi_{(2,1)}\, p_{(2,1)} + 2\chi_{(3)}\, p_{(3)}\right]$

<u>משפט</u>:
אם χ^λ הכרקטר האי-פריק של S_n המתאים ל-$\lambda \vdash n$ (ע"י מודול Specht S^λ) אז

$$ch^n(\chi^\lambda) = s_\lambda$$

<u>בפרט</u>:

$$e_n = \sum_{i_1<\dots<i_n} x_{i_1}\cdots x_{i_n} = s_{(1^n)} = ch^n(\chi^{(1^n)})$$

כרקטר הסימן

$$h_n = \sum_{i_1\le\dots\le i_n} x_{i_1}\cdots x_{i_n} = s_{(n)} = ch^n(\chi^{(n)})$$

הכרקטר הטריוויאלי $(=1)$

באופן יותר כללי :

$$h_\lambda = ch^n\left(1 \uparrow_{S_\lambda}^{S_n}\right)$$

הטריוויאלית של הצגת
S_n של סבלוניג'י (S_λ)

$$\frac{1}{z_\lambda} p_\lambda = ch^n(\delta_\lambda)$$

$$z_\lambda = \prod_i (m_i!\, i^{m_i})$$

$$\lambda = (1^{m_1} 2^{m_2} \cdots)$$

כאשר

$$\delta_\lambda(\pi) = \begin{cases} 1, & cyc(\pi) = \lambda \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

כלומר z_λ הוא
גודל המרכז של π,
כאשר $cyc(\pi) = \lambda$

פונקצי': אופיין של
מחלקת צמידות ב- S_n.