

## מבוא לקומבינטוריקה (89554) \ פרופ' רון עדין בחינת סיום (מועד א')

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).  
מותר להשתמש בדף הנוסחאות המצורף. אין להשתמש בכל חומר עזר אחר (גם לא במחשבון).  
יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות. כל השאלות שוות-משקל.  
נא להסביר ולנמק בבירור את הפתרון, ולכלול במחברת את כל החישובים הנחוצים.

*בהצלחה!*

1. הוכיחו: בכל סדרה של 70 מספרים שלמים יש תת-סדרה רצופה שסכום אבריה מתחלק ב-70.

2. מהו מספר הפתרונות של המשוואה  $x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 100$  כאשר  $x_i \geq 5$  מספר שלם (לכל  $i$ )?

3. הוכיחו:

$$1^2 \cdot \binom{n}{1} + 2^2 \cdot \binom{n}{2} + \dots + n^2 \cdot \binom{n}{n} = n(n+1) \cdot 2^{n-2} \quad (n \geq 2)$$

4. מהו מספר הילוכי השריג, מהנקודה  $(0,0)$  לנקודה  $(6,8)$ , הנמצאים ממש מעל לישר  $y = x$  (פרט לנקודת ההתחלה)? בכל שלב ניתן לעבור מ- $(m, n)$  ל- $(m+1, n)$  או ל- $(m, n+1)$ .

5. פתרו את נוסחת החזרה

$$a_n - 3a_{n-1} - 10a_{n-2} = 12 \quad (n \geq 2)$$

עם תנאי ההתחלה

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2$$

6. כמה מספרים בבסיס 3, בעלי  $n$  ספרות לכל היותר, מכילים מספר זוגי של אפסים, מספר לא מוגבל של "1"-ים ולפחות "2" אחד?