

## מבוא לקומבינטוריקה (89254) \ פרופ' רון עדין בחינת סיום (מועד ב')

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).  
מותר להשתמש בדף הנוסחאות המצורף. אין להשתמש בכל חומר עזר אחר (גם לא במחשבון).  
יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות. כל השאלות שוות-משקל.  
נא להסביר ולנמק בבירור את הפתרון, ולכלול במחברת את כל החישובים הנחוצים.

*מהצחה!*

1. א) הוכיחו: אם  $n, m$  מספרים טבעיים אז לכל סדרה באורך  $mn+1$  של מספרים ממשיים שונים יש: א תת-סדרה מונוטונית עולה באורך  $m+1$ , א תת-סדרה מונוטונית יורדת באורך  $n+1$  (או שתיהן).  
ב) לכל  $n, m$  כנ"ל תנו דוגמא של סדרה באורך  $mn$  שאין לה תת-סדרות כנ"ל.

2. כמה תת-קבוצות בגודל 6 של הקבוצה  $\{1, \dots, n\}$  אינן מכילות שני מספרים עוקבים?

3. יהי  $N = \binom{300}{100}$ .

א) מצאו את חזקת 3 המירבית המחלקת את  $N$ .  
ב) מצאו את הספרה הימנית בייצוג של  $N$  לפי בסיס 7.

4. בכמה דרכים ניתן לצבוע ב- $c$  צבעים את המשבצות של לוח בגודל  $3 \times 3$ , אם צביעות המתקבלות זו מזו ע"י סיבוב של הלוח נחשבות זהות? אין הכרח להשתמש בכל הצבעים.

5. מה מספר הדרכים לבחור (בלי חשיבות לסדר) 25 כדורים מ-10 צבעים, כאשר מכל צבע מותר לבחור עד 7 כדורים? כל הכדורים מאותו צבע זהים.

6. הראו שמספר הטבלאות (מטריצות) בגודל  $2 \times n$  שבהן רשומים המספרים  $1, \dots, 2n$  (כל אחד פעם אחת) כך שכל השורות והעמודות עולות (משמאל לימין ומלמעלה למטה, בהתאמה) – הוא מספר קטלאן  $C_n$ . למשל, עבור  $n=3$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$