

מבוא לקומבינטוריקה (89254) \ פרופ' רון עדין בחינת סיום (מועד א')

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).
מותר להשתמש בדף הנוסחאות המצורף. אין להשתמש בכל חומר עזר אחר (גם לא במחשבון).
יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות. כל השאלות שוות-משקל.
נא להסביר ולנמק בבירור את הפתרון, ולכלול במחברת את כל החישובים הנחוצים.

מהצחה!

1. הוכח: בכל סדרה (a_n) של 100 מספרים שלמים יש תת-סדרה רצופה a_{i+1}, \dots, a_j ששכום אבריה מתחלק ב-9 והיא מקיימת גם: $a_i \equiv a_j \pmod{11}$ ($1 \leq i < j \leq 100$)
 a_j הוא האיבר האחרון בתת-הסדרה, האיבר האחרון לפני תת-הסדרה).
2. יהיו: p ראשוני, $0 \leq k \leq n$ שלמים. הוכח כי חזקת p המדויקת המחלקת את המקדם הבינומי $\binom{n}{k}$ שווה למספר העמודות עם נְשָׂא (carry) בחיבור $k + (n - k) = n$ לפי בסיס p .
3. הוכח כי
$$\binom{n}{1} + 5\binom{n}{5} + 9\binom{n}{9} + 13\binom{n}{13} + \dots = n \cdot 2^{n-3} \cdot (1 + o(1))$$
4. מהו מספר הדרכים לסדר בצורה חוקית n זוגות סוגריים? למשל, עבור $n = 2$ יש שתי דרכים: $()()$, $(())$.
5. במשושה משוכלל מסמנים 12 נקודות - ששת הקודקודים וששת אמצעי הצלעות. מה מספר הדרכים לצבוע נקודות אלו ב- c צבעים, אם לא מבחינים בין צביעות המתקבלות זו מזו על ידי סיבוב של המשושה?
אין חובה להשתמש בכל הצבעים.
6. מצא את מספר הדרכים לבחור (ללא חשיבות לסדר) n כדורים בצבעים כחול, אדום וירוק (לא כל הצבעים חייבים להופיע), בהגבלות הבאות: מספר הכדורים הכחולים זוגי, מספר האדומים הוא 3 לכל היותר, ומספר הירוקים הוא 3 לפחות.
בדוק את תשובתך עבור $n = 3, 4, 5$.