

מבוא לקומבינטוריקה (89254) \ פרופ' רון עדין בחינת סיום (מועד ב')

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).
מותר להשתמש בדף הנוסחאות המצורף. אין להשתמש בכל חומר עזר אחר, פרט למחשבון.
יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות. כל השאלות שוות-משקל.
נא להסביר ולנמק בבירור את הפתרון, ולכלול במחברת את כל החישובים הנחוצים.

בהצלחה!

1. (א) הוכיחו: אם n, m טבעיים אז לכל סדרה באורך $mn+1$ של מספרים ממשיים שונים יש: אן תת-סדרה מונוטונית עולה באורך $m+1$, אן תת-סדרה מונוטונית יורדת באורך $n+1$ (או שתיהן).
(ב) תנו דוגמא של סדרה באורך mn שאין לה תת-סדרות כנ"ל.
2. נתונות $2n$ נקודות על היקף מעגל. הוכיחו שמספר הדרכים לחבר אותן בזוגות על-ידי n מיתרים לא נחתכים הוא מספר קטלאן C_n .
3. (א) באיזו חזקה של 2 מתחלק המקדם הבינומי $\binom{100}{50}$?
(ב) מהי הספרה (העשרונית) הימנית ביותר של מקדם זה?
4. בכמה דרכים ניתן לצבוע ב- c צבעים את 9 המשבצות של לוח 3×3 (כל משבצת בצבע יחיד), אם שתי צביעות המתקבלות זו מזו על-ידי סיבוב או שיקוף של הלוח נחשבות זהות?
5. בכמה מספרים שלמים בעלי n ספרות בדיוק **לפי בסיס 7** מופיעות רק ספרות שונות מאפס, והספרות 5, 6 מופיעות (כל אחת) מספר זוגי של פעמים? בדקו את תשובתכם עבור $n = 1, 2$.
6. נתון כי

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{6}{(1-x^2)(1-2x)}$$

מצאו נוסחה מפורשת עבור a_n , ובפרט חשבו את a_0, a_1, a_2 .