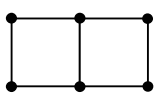


## מבוא לקומבינטוריקה (89254) \ פרופ' רון עדין בחינת סיום (מועד ב')

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).  
 מותר להשתמש בדף הנוסחאות המצורף. אין להשתמש בכל חומר עזר אחר, פרט למחשבון.  
 יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות. כל השאלות שוות-משקל.  
 נא להסביר ולנמק בביור את הפתרון, ולכלול במחברת את כל החישובים הנחוצים.

### קהלצה!

1. בשפתו של לוח משובץ בגודל  $1 \times 2$  מסומנות 6 נקודות, כמצויר.  צובעים כל אחת מהנקודות באחד מ-3 צבעים נתונים. מהו מספר הצביעות האפשריות, אם לא מבחינים בין צביעות הנבדלות זו מזו רק בסימטריה (סיבוב או שיקוף) של הלוח?

2. הראה שמספר הטבלאות (מטריצות) בגודל  $2 \times n$  שבהן רשומים המספרים  $1, \dots, 2n$  (כל אחד פעם אחת) כך שכל השורות והעמודות עולות (משמאל לימין ומלמעלה למטה, בהתאמה) – הוא מספר קטלאן  $C_n$ . למשל, עבור  $n = 3$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

3. מהו מספר הפתרונות של אי-השוויון  $x_1 + \dots + x_7 \leq 700$ , כאשר  $x_i$  הם מספרים שלמים אי-שליליים? רשום תשובה שאיננה כוללת פעולות חיבור.

4.

(א) הוכח את הפיתוח לטור חזקות:

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n$$

(ב) הוכח את הזהות:

$$\sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = 4^n$$

5. הוכח שאם בוחרים  $n+1$  מספרים מתוך  $\{1, \dots, 2n\}$  אז יש ביניהם בהכרח שני מספרים שאחד מהם מחלק את השני ללא שארית.

6. הוכח שעבור  $0 < p < 1$  קבוע,  $n \rightarrow \infty$ :

$$\log_2 \binom{n}{np} = n \cdot [H(p) + o(1)]$$

כאשר

$$H(p) := -p \log_2 p - (1-p) \log_2 (1-p)$$