מבוא לקומבינטוריקה (89254) \ פרופ׳ רון עדין
תשובות לשאלות בחינות תשס״ט (מועדים א׳, ב׳)

מועד א׳

1. $\frac{1}{4}\left(2^8+3\cdot 2^4\right)=76$

2. דרך א: נניח שהמספר n (הגדול ביותר) נמצא במקום $1\le k\le n$ בתמורה. כאשר הוא נכנס למחסנית היא חייבת להיות ריקה (אחרת הוא יצא לפני מספר קטן יותר), ולכן $k-1$ המספרים לפניו צריכים להיות כבר מסודרים. הוא יצא מהמחסנית אחרון, ולכן $n-k$ המספרים שאחריו צריכים להסתדר ברצף בעזרת המחסנית. מקבלים רקורסיה עבור מספר התמורות T_n:

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}T_{k-1}T_{n-k} \qquad (n\ge 1)$$

תנאי ההתחלה הוא כמובן $T_0=1$ (תמורה ריקה). לכן $T_n=C_n$ לכל n.
דרך ב: אפשר להניח שכל מספר נכנס למחסנית ויוצא (אולי מיד). כך לכל תמורה מתאימה סדרת צעדים אחת לכל היותר. אם נתאים להכנסת מספר למחסנית צעד $(1,1)$ בשריג המישורי ולהוצאת מספר נתאים צעד $(1,-1)$, אז התמורות הניתנות לסידור תתאמנה (באופן חח״ע ועל) להילוכי דיק $(0,0)\to(2n,0)$. (הסבר: תנאי המחסנית אומר שבכל שלב מספר היוצאים מן המחסנית עד כה לא עולה על מספר אלו שנכנסו אליה.) מספר ההילוכים האפשריים הוא מספר קטלאן C_n.

3. $\left(\!\!\binom{10}{495}\!\!\right)=\binom{504}{9}$

4.

א) $$a_n=\frac{1}{2}(n+1)+\frac{1}{4}\left[1+(-1)^n\right]=\begin{cases}\frac{1}{2}(n+2), & n\ even;\\ \frac{1}{2}(n+1), & n\ odd.\end{cases}$$

ב) דרך א: לפי סעיף א׳, $a_{50}=26$.
דרך ב: 5000 ₪ הם 25 שטרות של 200 ₪. אפשר להחליף $0\le k\le 25$ שטרות של 200 ₪ ב-$2k$ שטרות של 100 ₪. מספר האפשרויות (עבור k) הוא 26.

5. ניתן להפוך את כל משבצות הלוח למסילה סגורה, למשל ע״י המסרק של גומורי. (יש לצרף ציור!) מחיקת שתי משבצות בצבעים שונים מחלקת את המסילה לשתי מסילות פתוחות (אחת מהן אולי ריקה), וכל אחת מהן באורך זוגי בגלל חילוף הצבעים לסירוגין. כל אחת מהמסילות ניתן לכסות באבני דומינו. (יש גם דרכים אחרות להוכחה.)

.6

א) נחשב את האיבר הכללי של המכפלה $A\cdot\tilde{A}$, כאשר $\tilde{A}$ היא המטריצה הריבועית מאותו סדר כמו A עם איבר כללי $(-1)^{m-k}\binom{m}{k}$:

$$\sum_{k=0}^{n} a_{mk}\tilde{a}_{kl} = \sum_{k=l}^{m}\binom{m}{k}\binom{k}{l}(-1)^{k-l} = \binom{m}{l}\cdot\sum_{k=l}^{m}\binom{m-l}{k-l}(-1)^{k-l} = \begin{cases}1, & m=l;\\ 0, & m>l.\end{cases}$$

עבור $m<l$ הסכום הוא בבירור 0. לכן $A\cdot\tilde{A}=I$, ז"א : $\tilde{A}=A^{-1}$.

ב) אם נגדיר מטריצות C,B,A עם איבר כללי (m,k) שווה ל- : $\binom{m}{k}$, $m!S(k,m)$, m^k בהתאמה, אז הנוסחה הנתונה נותנת : $A\cdot B=C$. לכן $B=A^{-1}\cdot C$, ולפי סעיף א' נקבל מש"ל.

<u>מועד ב'</u>

1. $\frac{1}{4}\left(c^6+c^4+2c^3\right)\Big|_{c=3}=216$

2. לכל טבלה כנ"ל בגודל $2\times n$ נתאים הילוך שריג בעל $2n$ צעדים, המתחיל ב- $(0,0)$, כך שצעד מספר i הוא בכוון ימינה\למעלה אם המספר i מופיע בטבלה בשורה ראשונה\שניה, בהתאמה. בסה"כ יש n צעדים ימינה ו- n צעדים למעלה, ולכן נקודת הסיום היא (n,n) . לכל צעד למעלה (המתאים למספר בשורה שניה בטבלה) מותאם צעד ימינה (המתאים למספר בשורה ראשונה, באותה עמודה) <u>הקודם לו</u> בהילוך ; ולכן ההילוך נמצא כולו מתחת לישר $y=x$ (או נוגע בו). לא קשה לראות שכל הילוך שריג $(0,0)\to(n,n)$ הנמצא מתחת לישר מתקבל בצורה כזו מטבלה יחידה, והתאמה חח"ע זו בין טבלאות להילוכים מוכיחה מש"ל.

3. אם עוברים על כל האפשרויות עבור סכום המשתנים $0\le k\le 700$ ומשתמשים בזהות קומבינטורית מתאימה, מקבלים :

$$\sum_{k=0}^{700}\binom{k+6}{6}=\binom{707}{7}.$$

לחילופין, אפשר להגדיר

$$x_8 := 700-x_1-\ldots-x_7$$

ואז יש לפתור משוואה במקום אי-שוויון :

$$x_1+\ldots+x_7+x_8=700,$$

ומקבלים ישירות את התשובה $\binom{707}{7}$.

.4

א) $(1-4x)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}x^n$

ב) השוואת מקדמי x^n בשני אגפי הזהות (של טורי חזקות פורמליים) :

$$(1-4x)^{-1/2}\cdot(1-4x)^{-1/2}=(1-4x)^{-1}$$

תוך שימוש בסעיף א׳.

5. רושמים כל מספר טבעי כמכפלה של מספר אי-זוגי בחזקה של 2. יש רק n אפשרויות למספרים אי-זוגיים בתחום הנדון, ולכן בין $n+1$ המספרים הנבחרים בהכרח יש שנים עם אותו ״גורם אי-זוגי״, והגדול ביניהם הוא כפולה של השני בחזקה של 2.

6. שימוש בנוסחת סטירלינג בגרסה הלוגריתמית

$$\log_2(n!)=n(\log_2 n-\log_2 e)+\frac{1}{2}\log_2(2\pi n)=n\cdot\left[\log_2 n-\log_2 e+o(1)\right]$$

עבור n, pn ו-$(1-p)n$.