<u>מבוא לקומבינטוריקה (89254) \ פרופ׳ רון עדין</u>
<u>בחינת סיום (מועד א׳)</u>

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).
מותר להשתמש בדף הנוסחאות המצורף. אין להשתמש בכל חומר עזר אחר, פרט למחשבון.
יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות. כל השאלות שוות-משקל.
נא להסביר ולנמק בבירור את הפתרון, ולכלול במחברת את כל החישובים הנחוצים.

בהצלחה!

1. כל אחת מהמשבצות של לוח משובץ בגודל 2×4 נצבעת באחד משני צבעים (שחור \ לבן). מהו מספר הצביעות האפשריות, אם לא מבחינים בין צביעות הנבדלות זו מזו רק בסימטריה (סיבוב או שיקוף) של הלוח?

2. הוכח שמספר התמורות של המספרים $1,\dots,n$ הניתנות לסידור בסדר עולה בעזרת <u>מחסנית אחת</u> הוא מספר קטלאן C_n. למחסנית ניתן להכניס ו\או להוציא מספר אחד בכל פעם, לפי עקרון ״נכנס אחרון – יוצא ראשון״. למשל, עבור $n=3$ התמורות הן: 321 312 213 132 123 (אך לא 231). דוגמא לסידור התמורה 213:

$$123\leftarrow\lfloor\ \rfloor\leftarrow \qquad 12\leftarrow\lfloor\ \rfloor\leftarrow 3 \qquad \leftarrow\left\lfloor\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right\rfloor\leftarrow 3 \qquad \leftarrow\lfloor\ \rfloor\leftarrow 213$$

3. מהו מספר הפתרונות של המשוואה $x_1+\ldots+x_{10}=1000$, כאשר x_i מספרים טבעיים אי-זוגיים?

4.
   א) מצא במפורש את המקדם הכללי a_n בפיתוח
   $$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$
   ב) מהו מספר הדרכים להרכיב סכום של 5000₪ בעזרת שטרות של 100₪ ו-200₪? לא ניתן להבחין בין שטרות מאותו ערך, ולא חייבים להשתמש בכל סוגי השטרות.

5. המשבצות בלוח בגודל $m\times n$, עם שטח mn זוגי, צבועות לסירוגין שחור ולבן. מוחקים מהלוח שתי משבצות בצבעים שונים. הוכח שאם $m,n\geq 2$ אז תמיד ניתן לכסות את המשבצות הנותרות על-ידי אבני דומינו, כאשר כל אבן מכסה שתי משבצות סמוכות (אופקית או אנכית).

6.

א) תהי A מטריצה ריבועית מסדר $(n+1)\times(n+1)$ עם איבר כללי $a_{m,k}=\binom{m}{k}$ $(0\le m,k\le n)$, כאשר מסכימים להגדיר $\binom{m}{k}=0$ עבור $0\le m<k$. הוכח שהאיבר הכללי של המטריצה ההפכית A^{-1} הוא $(-1)^{m-k}\binom{m}{k}$ (עם הסכם כנ"ל).

ב) נתון שמספרי סטירלינג מסוג שני מקיימים:

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}k!S(n,k)=m^n \qquad (m,n\ge 0)$$

(כאן $0^0:=1$). הוכח:

$$S(n,m)=\frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}k^n \qquad (m,n\ge 0)$$