

מבוא לקומבינטוריקה (89254) \ פרופ' רון עדין בחינת סיום (מועד א')

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).
מותר להשתמש בדף הנוסחאות המצורף. אין להשתמש בכל חומר עזר אחר, פרט למחשבון.
יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות. כל השאלות שוות-משקל.
נא להסביר ולנמק בבירור את הפתרון, ולכלול במחברת את כל החישובים הנחוצים.

בהצלחה!

1. נתבונן בנוסחת החזרה

$$a_n = 2(a_{n-2} + a_{n-3} + \dots + a_0) \quad (n \geq 2)$$

עם תנאי ההתחלה

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2.$$

(א) הראה ש- $a_3 = 6$. מהו a_4 ?

(ב) מצא נוסחה מפורשת עבור a_n (כפונקציה של n בלבד) לכל $n \geq 1$.

2.

(א) בכמה דרכים ניתן לצבוע את 4 קדקדי הגרף השלם K_4 ב- c צבעים, כאשר שתי צביעות המתקבלות זו מזו על-ידי תמורה של הקדקדים נחשבות זהות?
(ב) בכמה דרכים ניתן לצבוע את 6 קשתות הגרף השלם K_4 ב- d צבעים, כאשר שתי צביעות המתקבלות זו מזו על-ידי תמורה של הקדקדים נחשבות זהות?

3.

(א) הוכח: טור חזקות פורמלי $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ הוא הפיך (לגבי כפל) אם $a_0 \neq 0$.

(ב) חשב את ההפכי $b(x) = a(x)^{-1}$ של טור החזקות הפורמלי

$$a(x) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} x^n = 1 - x - x^2 - x^3 - \dots$$

4.

(א) תן הוכחה קומבינטורית עבור הזהות:

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1} \quad (n \geq 1)$$

(ב) הוכח, בכל דרך שתבחר:

$$\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} = (n+1)n \cdot 2^{n-2} \quad (n \geq 2)$$

5. הוכח: לכל $n \geq 1$

$$x^n = \sum_{k=1}^n S(n, k)(x)_k$$

כאשר $S(n, k)$ הם מספרי סטירלינג מסוג שני, $(x)_k = \prod_{i=0}^{k-1} (x-i)$.

6.

(א) מצא כמה סדרות (a_1, \dots, a_{10}) של מספרים שלמים מקיימות

$$1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{10} \leq 999$$

(ב) מצא כמה מהסדרות הנ"ל מכילות מספרים אי-זוגיים בלבד.