

מבוא לקומבינטוריקה (89254) \ פרופ' רון עדין תשובות לשאלות בחינות תשס"ז (מועדים א', ב')

מועד א'

1. משפט ארדש-סקרש.

$$2. a_n = 2^n + 2n + 7 \quad (n \geq 0)$$

3. 2^1 , כי בחיבור $20 + 80 = 100$, לפי בסיס 2: $10100_2 + 1010000_2 = 1100100_2$, יש נשא אחד.

4. מחלקים את המשולש, על-ידי ישרים מקבילים לצלעות, ל-16 משולשים שווים-צלעות שאורך צלעותיהם 1. לפחות באחד המשולשים יש יותר מנקודה אחת.

5. שיקול קומבינטורי מראה שמתקיימת נוסחת החזרה

$$b_{n+1} = \sum_{k=0}^n b_k b_{n-k} \quad (n \geq 0)$$

עם תנאי ההתחלה $b_0 = 1$, ולכן b_n הוא מספר קטלאן ה- n .

$$6. \binom{49}{20} - 30 \binom{40}{11} + \binom{30}{2} \binom{31}{2}$$

מועד ב'

1. הוכחה בעזרת שיקוף בישר.

2. לפולינום האופייני יש שורש רציונלי -1, ועוד שני שורשים $\frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$. שני השורשים האחרונים הם בעלי ערכים מוחלטים שונים וגדולים מ-1, ולכן הופעת כל אחד מהם בפתרון הכללי לא תאפשר $a_n = O(1)$. לכן: $a_n = \beta \cdot (-1)^n \quad (n \geq 0)$.

$$3. \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{123}{3^i} \right\rfloor = 41 + 13 + 4 + 1 = 59$$

4. עקרון שובך היונים על סכומים חלקיים המתחילים באיבר הראשון.

5. הוכחה כמו בשאלה 5 במועד א'.

$$6. \binom{109}{10} - 100 \binom{105}{6} + \binom{100}{2} \binom{101}{2}$$