

מבוא לקומבינטוריקה (88554) \ פרופ' רון עדין בחינת סיום (מועד א')

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).
 מותר להשתמש בדף הנוסחאות המצורף. אין להשתמש בכל חומר עזר אחר, פרט
 למחשבון.
 יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות. כל השאלות שוות-משקל.
 נא להסביר ולנמק בבירור את הפתרון, ולכלול במחברת את כל החישובים הנחוצים.

מהצחה!

1. הוכיחו: אם p ראשוני, אז $0 \leq k \leq n$ שלמים, אז חזקת p המירבית המחלקת את
 המקדם הבינומי $\binom{n}{k}$ שווה למספר עמודות הנשא בחיבור (לפי בסיס p)
 $k + (n - k) = n$.

2. בכמה מספרים עשרוניים בעלי n ספרות מופיעות רק הספרות 1-6, כאשר
 1, 2, 3 מופיעות מספר אי-זוגי של פעמים (כל אחת) ואילו 4, 5, 6 מופיעות מספר
 זוגי של פעמים (כל אחת)?
 בדקו את תשובתכם עבור $1 \leq n \leq 4$.

3. (א) הוכיחו: בכל תת-קבוצה בגודל 51 של קבוצת המספרים הזוגיים
 $\{2, 4, 6, \dots, 200\}$ יש שני מספרים המחלקים זה את זה.
 (ב) רשמו קבוצה בגודל 50 של הקבוצה הנ"ל שאין בה שני מספרים המחלקים
 זה את זה.

4. מצאו את השארית בחלוקה ב-7 של המקדם הבינומי $\binom{100}{50}$.

5. מצאו את מקדם x^{1000} בפיתוח לטור חזקות פורמלי של $\frac{1+2x+4x^2+8x^3+\dots}{1+2x+3x^2+4x^3+\dots}$.

6. הוכיחו: מספר הדרכים לחלק מצולע בעל $n+2$ צלעות למשולשים על ידי
 העברת אלכסונים לא נחתכים הוא מספר קטלאן $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.