

מבוא לקומבינטוריקה (88554) \ פרופ' רון עדין בחינת סיום (מועד א')

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).
מותר להשתמש בדף הנוסחאות המצורף. אין להשתמש בכל חומר עזר אחר, פרט
למחשבון.
יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות. כל השאלות שוות-משקל.
נא להסביר ולנמק בבירור את הפתרון, ולכלול במחברת את כל החישובים הנחוצים.

בהצלחה!

1. יהיו m, n שלמים אי-שליליים. הוכח: בכל סדרה של $mn+1$ מספרים ממשיים
שונים יש תת-סדרה עולה באורך $m+1$ או תת-סדרה יורדת באורך $n+1$.

2. נתון משושה קמור שכל זוויותיו שוות, אך אורכי צלעותיו מתייחסים זה לזה
כמו $2,1,2,1,2,1$ (בסדר מעגלי).

(א) צייר את המשושה ותאר את 6 אברי חבורת הסימטריה שלו (הן באופן
גאומטרי והן כתמורות של הקודקודים).

(ב) מהו מספר הצביעות האפשריות של קודקודי המשושה ב- c צבעים? אין
הכרח להשתמש בכל הצבעים, וצביעות המתקבלות זו מזו על-ידי סימטריה
של המשושה נחשבות זהות.

(ג) מהו מספר הצביעות של צלעות המשושה ב- d צבעים, בתנאים כנ"ל?

3. פתור את נוסחת הרקורסיה

$$F_n + 2F_{n-1} + 3F_{n-2} + \dots + (n+1)F_0 = n^2 \quad (n \geq 0)$$

4. בכמה מספרים עשרוניים בעלי 100 ספרות לכל היותר, סכום הספרות הוא 30?

5.

(א) הוכח: אם $a(x), b(x)$ הם טורי חזקות פורמליים מעל שדה F , אז ההרכבה
 $a(b(x))$ מוגדרת (באופן המקובל) אם ורק אם $a(x)$ הוא פולינום או $b_0 = 0$

$$(כאשר $b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$).$$

(ב) עבור אילו טורי חזקות פורמליים $b(x)$ מעל שדה הרציונליים \mathbb{Q} , גם $\ln b(x)$
הוא טור חזקות פורמלי?

6. מה מספר הדרכים להגיע מהנקודה $(0,0)$ לנקודה $(20,20)$ בהילוך שריג, עם
צעדים למעלה וימינה בלבד, כך שההילוך לא ייגע בישר $y = x+10$?