

מבוא לקומבינטוריקה (88554) \ פרופ' רון עדין בחינת סיום (מועד ב')

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).
מותר להשתמש בדף הנוסחאות המצורף. אין להשתמש בכל חומר עזר אחר, פרט
למחשבון.
יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות. כל השאלות שוות-משקל.
נא להסביר ולנמק בבירור את הפתרון, ולכלול במחברת את כל החישובים הנחוצים.

הצלחה!

1. יהיו $a > b \geq 0$ מספרים שלמים. הוכח: מספר הילוכי השריג $(a, b) \rightarrow (0, 0)$

הנמצאים (פרט לנקודה $(0, 0)$) ממש מתחת לישר $y = x$ הוא $\frac{a-b}{a+b} \binom{a+b}{a}$.

2. הוכח: בכל סדרה של 1000 מספרים שלמים יש תת-סדרה רצופה (לא ריקה)
שסכום אבריה הוא כפולה של 1000.

3. הוכח: לכל $0 \leq k \leq 26$, המקדם הבינומי $\binom{26}{k}$ אינו מתחלק ב-3.

4. חשב את ההפכי לכפל $b(x) = a(x)^{-1}$ של טור החזקות הפורמלי

$$a(x) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} 6^n x^{2n+1}.$$

בדוק את תשובתך על ידי חישוב מפורש של מקדמי x^0, \dots, x^3 במכפלה
 $a(x) \cdot b(x)$.

5. הוכח, עבור מספרי סטירלינג מסוג ראשון $s(n, k)$:

$$\sum_{k=1}^n s(n, k) = 0 \quad (n \geq 2) \quad (\text{א})$$

$$\sum_{k=1}^n |s(n, k)| = n! \quad (n \geq 1) \quad (\text{ב})$$

6. בכמה דרכים ניתן לקבל סכום 120 בהטלת 100 קוביות?