מבוא לקומבינטוריקה (88554) \ פרופ' רון עדין
תשובות לשאלות בחינות תש"ע (מועדים א', ב')

מועד א'

2. נסמן: $y_i := (x_i - 1)/2 \quad (1 \le i \le 10)$, ואז: $y_1 + \ldots + y_{10} = 995$. נסמן גם $y_{11} := 995 - (y_1 + \ldots + y_{10})$, ואז $y_i \ge 0 \quad (\forall i)$ מקיימים: $y_1 + \ldots + y_{11} = 995$. מספר הפתרונות הוא $\left(\!\binom{11}{995}\!\right) = \binom{1005}{10}$.

3. אגף שמאל הוא מספר הדרכים לבחור תת-קבוצה B (בגודל כלשהו) מתוך קבוצה A בגודל n, ואחר-כך לבחור מתוך B תת-קבוצה C בגודל k. אגף שמאל הוא מספר הדרכים לבחור תחילה תת-קבוצה C בגודל k מתוך קבוצה A בגודל n, ואחר-כך לבחור קבוצת ביניים $C \subseteq B \subseteq A$ בגודל כלשהו. אלו שתי דרכים שונות לספור, עבור קבוצה נתונה A בגודל n, את כל אברי הקבוצה $\{(C,B) \mid C \subseteq B \subseteq A, |C| = k\}$.

4. <u>הוכחה עקיפה</u>: מראים שהמספרים הנ"ל מקיימים את הרקורסיה ואת תנאי ההתחלה של מספרי קטלאן.
<u>הוכחה ישירה</u>: בונים התאמה בין חלוקות מצולע כנ"ל לבין עצים בינריים מלאים. בוחרים אחת מצלעות המצולע, ומסמנים את אמצעה כקודקוד "שורש". בהינתן חלוקה של המצולע למשולשים על-ידי אלכסונים לא נחתכים, מסמנים קודקוד גם באמצע כל צלע אחרת ובאמצע כל אלכסון. מחברים את ה"שורש" לשני אמצעי הצלעות במשולש המכיל את הצלע מסומנת, וממשיכים באופן זה לבנות עץ בינרי מלא עם n קודקודים פנימיים (שאחד מהם הוא "שורש") ו- $(n+1)$ עלים. מראים שההתאמה חח"ע ועל.

5. הפונקציה היוצרת המעריכית היא
$$\frac{1}{8}\left(e^x + e^{-x}\right)^3 \cdot \left(e^x\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{6x} + 3\cdot e^{4x} + 3\cdot e^{2x} + 1\right)$$
והתשובה היא $\frac{1}{8}\left(6^n + 3\cdot 4^n + 3\cdot 2^n\right)$ עבור $n > 0$. בפרט: $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 12$.

6. $\frac{1}{16}\left(c^8 + 4c^5 + 5c^4 + 2c^2 + 4c\right)$

מועד ב'

2. עבור סדרה $(x_1, \ldots, x_{1000})$ נגדיר את סדרת הסכומים החלקיים $(s_1, \ldots, s_{1000})$, כאשר $s_i := x_1 + \ldots + x_i \quad (1 \le i \le 1000)$. נגדיר גם $s_0 := 0$. לפי עקרון שובך היונים,

לפחות שנים מתוך $s_0,\dots,s_{1000}$ משאירים אותה שארית בחילוק ב-1000. אם אלו s_i, s_j $(i<j)$ אז $s_j-s_i=x_{i+1}+\dots+x_j$ מתחלק ב-1000.

3. המספר העשרוני 26 מיוצג, לפי בסיס 3, על-ידי 222. לכן בביצוע פעולת החיבור $k+(26-k)=26$ אף פעם אין נֶשֶׂא, ולפי משפט לוקאס מקבלים מש״ל.

4. $a(x)=1-x-6x^3-\dots=1-\dfrac{x}{1-6x^2}$, ולכן

$$b(x)=\frac{1-6x^2}{1-x-6x^2}=1+\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(3^n-(-2)^n\right)x^n=1+x+x^2+7x^3+\dots$$

בודקים שאמנם (עד מקדם x^3):

$$\left(1-x-6x^3-\dots\right)\left(1+x+x^2+7x^3+\dots\right)=1+0\cdot x+0\cdot x^2+0\cdot x^3+\dots$$

5.

א) שימוש בנוסחה $(x)_n=\sum_{k=1}^{n}s(n,k)x^k$ עבור $x=1$.

ב) שימוש בנוסחה הנ״ל עבור $x=-1$. הוכחה קומבינטורית: האגף עם הסכום סופר את כל התמורות לפי מספר המחזורים שלהן.

6. $\binom{119}{20}-\binom{100}{1}\binom{113}{14}+\binom{100}{2}\binom{107}{8}-\binom{100}{3}\binom{101}{2}$