

## מבוא לקומבינטוריקה (88554) \ פרופ' רון עדין בחינת סיום (מועד א')

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).  
מוותר להשתמש בדף הנוסחאות המצורף. אין להשתמש בכל חומר עזר אחר, פרט  
למחשבון.  
יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות. כל השאלות שוות-משקל.  
נא להסביר ולנמק בבירור את הפתרון, ולכלול במחברת את כל החישובים הנחוצים.

*ההצחה!*

1. הוכח: טור חזקות פורמלי  $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  הוא הפיך (לגבי כפל) אם ורק אם  
 $a_0 \neq 0$ .

2. מצא את מספר הפתרונות של אי-השוויון  $x_1 + \dots + x_{10} \leq 2000$  כאשר  $x_i$  הם  
מספרים שלמים, אי-זוגיים וחיוביים. (התשובה אינה אמורה לכלול פעולת  
חיבור.)

3. תן הוכחה קומבינטורית לזהות

$$\sum_{m=k}^n \binom{n}{m} \binom{m}{k} = \binom{n}{k} \cdot 2^{n-k} \quad (0 \leq k \leq n).$$

הוכחה לא קומבינטורית תזכה בניקוד חלקי.

4. הוכח: מספר הדרכים לחלק מצולע קמור בעל  $n+2$  קודקודים (מסומנים)  
למשולשים על ידי העברת אלכסונים לא נחתכים שווה למספר העצים הבינריים  
המלאים עם  $n$  קודקודים פנימיים (כאשר לכל קודקוד פנימי יש בן ימני ובן  
שמאלי, וכל קודקוד לא פנימי הוא עלה, ללא בנים בכלל). למשל: עבור  $n=3$   
מספר זה הוא 5. (ההוכחה יכולה להיות ישירה או עקיפה.)

5. מהו מספר הדרכים להטיל קוביה  $n$  פעמים כך שכל תוצאה זוגית (2, 4, 6)  
תופיע מספר זוגי של פעמים? אין הגבלה על מספר ההופעות של 1, 3, 5. בדוק  
שעבור  $n=2$  תשובתך היא 12.

6. בכמה דרכים ניתן לצבוע את הצלעות של מתומן משוכלל ב- $c$  צבעים, כאשר  
שתי צביעות המתקבלות זו מזו על ידי סיבוב או שיקוף של המתומן נחשבות  
זהות?