

מבוא לקומבינטוריקה (88554) \ פרופ' רון עדין בחינת סיום (מועד ב')

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).
מותר להשתמש בדף הנוסחאות המצורף. אין להשתמש בכל חומר עזר אחר (גם לא במחשבון).
יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות. כל השאלות שוות-משקל.
נא להסביר ולנמק בבירור את הפתרון, ולכלול במחברת את כל החישובים הנחוצים.

בהצלחה!

1. נסחו והוכיחו תנאי הכרחי ומספיק לכך שטור חזקות פורמלי

$$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in \mathbb{F}[[x]] \text{ (מעל שדה } \mathbb{F} \text{) יהיה הפיך (לגבי כפל טורים).}$$

2. מהו מספר המספרים העשרוניים בעלי 100 ספרות, משני סוגים בלבד (20 ספרות "3", 80 ספרות "6"), כך שלכל $1 \leq k \leq 100$, בין k הספרות הראשונות משמאל יש יותר ספרות "6" מאשר ספרות "3"?

3. מצאו סדרה (a_n) המקיימת בו-זמנית את שתי הרקורסיות

$$a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = 3 \cdot 2^n \quad (n \geq 2)$$

$$a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0 \quad (n \geq 2)$$

(לא נתונים תנאי התחלה).

4. בכמה דרכים ניתן לצבוע ב- c צבעים את הקדקודים של מחומש משוכלל? שתי צביעות הנבדלות על-ידי סיבוב או שיקוף של המחומש נחשבות זהות.

5. הוכיחו: אם בוחרים 10 נקודות במשולש שכל צלעותיו באורך 3, אז יש ביניהן לפחות זוג נקודות אחד שהמרחק ביניהן 1 לכל היותר.

6.

(א) מהו מספר הסדרות (a_1, \dots, a_8) של מספרים שלמים המקיימות $0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_8 \leq 20$?

(ב) מהו מספר הסדרות הנ"ל המקיימות גם $a_5 = 10$?