

מבוא לקומבינטוריקה (88554) \ פרופ' רון עדין בחינת סיום (מועד א')

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).
מותר להשתמש בדף הנוסחאות המצורף. אין להשתמש בכל חומר עזר אחר (גם לא במחשבון).
יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות. כל השאלות שוות-משקל.
נא להסביר ולנמק בבירור את הפתרון, ולכלול במחברת את כל החישובים הנחוצים.

בהצלחה!

1. יהיו $a > b > 0$ שלמים. הוכיחו: מספר הילוכי השריג מהנקודה $(0,0)$ לנקודה (a,b) שאינם נוגעים בישר $y = x$ (פרט לנקודת ההתחלה) הוא

$$\binom{a+b}{a} - 2 \binom{a+b-1}{a} = \frac{a-b}{a+b} \binom{a+b}{a}$$

(בכל שלב ניתן לצעוד מהנקודה (m,n) ל- $(m,n+1)$ או ל- $(m+1,n)$).

2. מצאו את המקדם a_{50} בפיתוח של

$$\frac{25}{(1-2x)^2(1-3x)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

3. תהי (a_n) סדרה המקיימת

$$a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = (-3)^n \quad (n \geq 2)$$

(לא נתונים תנאי התחלה). רשמו נוסחת חזרה לינארית הומוגנית (מסדר 3) שהסדרה (a_n) מקיימת.

4. בכמה דרכים ניתן לצבוע ב- c צבעים את הדפנות (ללא הבסיס) של פירמידה שבסיסה משושה משוכלל? שתי צביעות הנבדלות על-ידי סיבוב (אך לא שיקוף) של הפירמידה נחשבות זהות.

5. כמה מספרים שלמים בעלי 30 ספרות בדיוק, כולן אי-זוגיות, הם בעלי סכום ספרות 50?

6. חשבו (נוסחה סגורה), לכל $n \geq 2$:

$$\binom{n}{2} \cdot 2x^1 + \binom{n}{4} \cdot 4x^3 + \binom{n}{6} \cdot 6x^5 + \dots$$

