מבוא לקומבינטוריקה (88554) \ פרופ' רון עדין
תשובות לשאלות בחינות תשס"ה (מועדים א', ב')

מועד א'

1. לפי נוסחת ההכללה וההוצאה מן הכלל:

$$4200\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)=1440$$

2. פונקציה יוצרת מעריכית:

$$a(x)=\tfrac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})\cdot\tfrac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})\cdot e^{x}=\tfrac{1}{4}(e^{3x}-e^{-x})$$

ולכן

$$a_n=\tfrac{1}{4}[3^n-(-1)^n]\quad (n\ge 0)$$

3.

א) למשל, ע"י גזירת $(1-x)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$.

ב) נגדיר פונקציה יוצרת (רגילה):

$$a(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

הכפלת נוסחת-החזרה ב- x^n וסיכום על כל $n\ge 0$ נותנים:

$$\frac{1}{x}\left(a(x)-a_0\right)=(1-x)^{-2}\cdot a(x)$$

$$a(x)=\frac{1-2x+x^2}{1-3x+x^2}\quad\Rightarrow\quad a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]\quad (n\ge 1),\quad a_0=1.$$

ג) הצבת $k=2n-1$ בנוסחה המפורשת למספרי פיבונצ'י:

$$F_k=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right]$$

4.

א) פירוק לראשוניים: $10=2\cdot 5$. חזקת 5 המחלקת את $100!$:

$$\left\lfloor\frac{100}{5}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{100}{5^2}\right\rfloor+\ldots=24$$

חזקת 2 גדולה יותר, ולכן חזקת 10 היא 24.

ב) כאן צריך לבדוק גם את חזקת 2. לפי משפט לוקס, נבדוק נשא בחיבור $100=50+50$ לפי בסיס 2 ולפי בסיס 5:

$$\begin{array}{rr} 110010_2 & 20_5 \\ 110010_2 & 20_5 \\ \hline 1100100_2 & 40_5 \end{array}$$

לפי בסיס 2 יש 3 עמודות נשא, ולפי בסיס 5 אין עמודות נשא. חזקת 10 היא, אם כן, 0.

.5

א) $a_n = 3^n - 2^n \quad (n \ge 0)$

ב) שרשי המשוואה האופיינית הם 3 ו-2. לכן נוסחת-החזרה היא:
$a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 0 \quad (n \ge 2)$

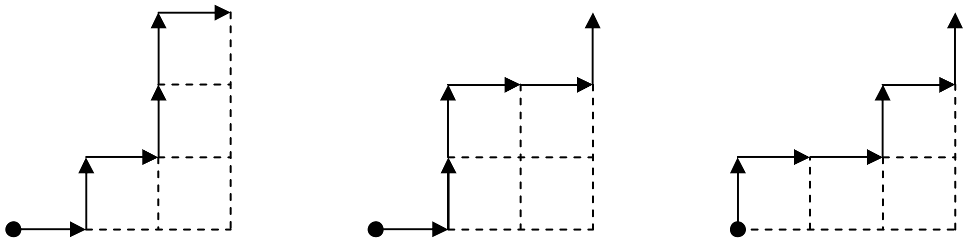
<u>מועד ב׳</u>

.1

א)

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}_q = \frac{[6]_q!}{[3]_q![3]_q!} = \frac{[6]_q[5]_q[4]_q}{[3]_q[2]_q[1]_q} = \frac{(1-q^6)(1-q^5)(1-q^4)}{(1-q^3)(1-q^2)(1-q^1)} =$$
$$= (1+q^3)(1+q+q^2+q^3+q^4+q^5)(1+q^2) =$$
$$= 1+q+2q^2+3q^3+3q^4+3q^5+3q^6+2q^7+q^8+q^9$$

ב) מספר הילוכי השריג $[0,0] \to [3,3]$ עם שטח 4 מתחתם הוא מקדם q^4 בפולינום $\begin{bmatrix} 3+3 \\ 3 \end{bmatrix}_q$. לפי סעיף א׳, מקדם זה הוא 3. בחישוב ישיר, אלו הם שלושת ההילוכים:



2. הנוסחה הנתונה היא לינארית הומוגנית, עם מקדמים <u>לא קבועים</u>. נציב $b_n := (n+1)a_n$, ואז נקבל מקדמים קבועים: $b_n - 2b_{n-1} + b_{n-2} = 0$. המשוואה האופיינית היא $\alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0$, ושורשיה $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ (שורש כפול). הפתרון הכללי הוא $b_n = (c_1 + c_2 n)\cdot 1^n$, ובהצבת תנאי התחלה $b_n = 3+n$, ולכן $a_n = \dfrac{3+n}{n+1}$.

3. <u>דרך א'</u>: הכללה והוצאה מן הכלל.

$$U := \{(x_t)_{t=1}^n \mid x_t \in \{1,2,3,4\} \quad (\forall t)\}$$

$$A_k := \{(x_t)_{t=1}^n \in U \mid x_t \neq k \quad (\forall t)\} \quad (k = 1,2,3)$$ (אין הגבלות על הופעת $k = 4$)

$$e_0 = \sum_{i=0}^{3} (-1)^i s_i = \sum_{i=0}^{3} (-1)^i \binom{3}{i} (4-i)^n = 4^n - 3\cdot 3^n + 3\cdot 2^n - 1$$

<u>דרך ב'</u>: פונקציה יוצרת מעריכית.

$$\tilde{a}_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x - 1 \qquad (k = 1,2,3)$$

$$\tilde{a}_4(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

$$\tilde{a}(x) = \tilde{a}_1(x)\tilde{a}_2(x)\tilde{a}_3(x)\tilde{a}_4(x) = (e^x - 1)^3 e^x = e^{4x} - 3e^{3x} + 3e^{2x} - e^x$$

$$a_n = 4^n - 3\cdot 3^n + 3\cdot 2^n - 1$$

4. פונקציה יוצרת רגילה:

לכדורים אדומים: $1 + x^2 + x^4 + \ldots = \frac{1}{1-x^2}$

לכדורים כחולים: $1 + x + x^2 + x^3$

לכדורים לבנים: $1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1-x^4}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{1+x^2}{(1-x)^2} = (1+x^2) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$$

$$a_n = (n+1) + (n-1) = 2n \quad (n \geq 2)$$

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2$$

5.

א) צירופים של 50 מתוך 7, עם חזרות: $\left(\!\binom{7}{50}\!\right) = \binom{56}{50} = \binom{56}{6}$

ב) <u>דרך א'</u>: הורדת הפתרונות הלא רצויים, בהם יש i עם $x_i \geq 25$ (יתכן ערך אחד או שנים כאלו), ע"י הכללה והוצאה מן הכלל: $\binom{56}{6} - 7\binom{31}{6} + \binom{7}{2}\binom{6}{6}$.

<u>דרך ב'</u>: פונקציה יוצרת רגילה. מחפשים את מקדם x^{50} בפיתוח

$$(1 + x + \ldots + x^{24})^7 = (1 - x^{25})^7 (1-x)^{-7} = \sum_{i=0}^{7} \binom{7}{i} (-x^{25})^i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \binom{6+j}{j} x^j$$

האפשרויות לקבלת x^{50} הן:

$$(-x^{25})^2 \cdot x^0$$

$$(-x^{25})^1 \cdot x^{25}$$

$$(-x^{25})^0 \cdot x^{50}$$

והמקדם המבוקש:

$$\binom{7}{2}\binom{6}{0} - \binom{7}{1}\binom{31}{25} + \binom{7}{0}\binom{56}{50} = \binom{7}{2} - 7\binom{31}{6} + \binom{56}{6}$$