

מבוא לקומבינטוריקה (88554) \ פרופ' רון עדין בחינת סיום (מועד ב')

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).
אין להשתמש בחומר עזר (גם לא במחשבון), פרט לדף-סיכום דו-צדדי בגודל A4.
יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות. כל השאלות שוות-משקל.
נא להסביר באופן ברור את דרך הפתרון, ולכלול במחברת את כל החישובים הנחוצים.

מהצחה!

1. נגדיר:

$$F_n := \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \dots$$

(א) חשב את F_n עבור $0 \leq n \leq 4$.

(ב) הוכח (בכל דרך שתבחר): F_n הוא מספר פיבונצ'י ה- n .

2.

(א) מצא פתרון כללי לנוסחת הנסיגה

$$2a_n - 7a_{n-1} + 3a_{n-2} = 4 \quad (n \geq 2)$$

(ב) מצא פתרון לנוסחת הנסיגה הנ"ל המקיים:

$$a_0 = 1, \quad |a_n| = O(1) \quad (n \rightarrow \infty)$$

3.

(א) דוור מחלק מכתבים לדיירים בבנין בן n דירות, כשלכל דייר מיועד מכתב אחד. אם כל דייר מקבל אמנם מכתב אחד, אבל בחלוקה אקראית – מהי ההסתברות שבדיוק k מהדיירים יקבלו את המכתב המיועד להם?

(ב) עבור k קבוע, $n \rightarrow \infty$, הוכח שההסתברות הנ"ל $\rightarrow \frac{1}{k!e}$.

4.

(א) בכמה דרכים ניתן להטיל קוביה 24 פעמים כך שכל תוצאה תתקבל בדיוק 4 פעמים?

(ב) בכמה דרכים ניתן להטיל קוביה 24 פעמים כך שסכום התוצאות יהיה 30?

5. מהו מספר הסדרות המורכבות מ-40 אחדים ו-30 אפסים, כך שבכל רישא של הסדרה יש יותר אחדים מאפסים?